TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Informaatio- ja luonnontieteiden tiedekunta

Tony Liimatainen

Pintojen hyperbolisointi Riccin virtauksen avulla

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin tutkintoa varten teknillisen fysiikan koulutusohjelmassa.

Espoossa, 1.12.2008

Työn valvoja: Professori Matti Lassas
Työn ohjaaja: Lehtori Kirsi Peltonen

TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Informaatio- ja luonnontieteiden tiedekunta

DIPLOMITYÖN TIIVISTELMÄ

Tekijä:	Tony Liimatainen
Koulutusohjelma:	Teknillisen fysiikan koulutusohjelma
Pääaine:	Matematiikka
Sivuaine:	Sovellettu fysiikka
Työn nimi:	Pintojen hyperbolisointi Riccin virtauksen avulla
Title in English:	Hyperbolising surfaces with the Ricci flow
Professuurin koodi ja nimi:	Mat-1 Matematiikka
Työn valvoja:	Professori Matti Lassas
Työn ohjaaja:	Lehtori Kirsi Peltonen

Moniston Riemannin metriikan kehittäminen Riccin virtauksella on osoittautunut tehokkaaksi työkaluksi differentiaaligeometrian tutkimuksessa. Riccin virtaus on metriikan evoluutioyhtälö, jolla on epälineaarisuudesta huolimatta lämpöyhtälömäisiä ominaisuuksia. Vuonna 2003 Riccin virtauksen avulla todistettiin Poincarén konjektuuri.
Työssä tutkimme Riccin virtausta pinnoilla ja samalla tutustumme Poincarén konjektuurinkin todistuksessa käytettyihin menetelmiin. Tutkimme miten metriikka kehittyy pinnalla Riccin virtauksessa. Selvitämme millä oletuksilla ja miten kauan Riccin virtauksen ratkaisu on olemassa. Tutkimme miten pinnan kaarevuus käyttäytyy virtauksen aikana ja millaiseen metriikkaan virtauksen ratkaisu pinnalla suppenee asymptoottisesti.
Työssä johdamme tunnettuihin Riccin virtauksen tuloksiin nojaten virtauksen ratkaisun olemassaoloteorian, joka on voimassa riippumatta moniston ulottuvuudesta. Sen jälkeen sovellamme sitä saadaksemme tarvitsemamme olemassaoloteorian pinnoille. Pinnoilla kaarevuus yksinkertaistuu ja Gauss-Bonnetin teoreema kytkee pinnan kaarevuuden sen topologiaan. Näitä huomioita käyttäen johdamme pinnan Riccin virtaukselle yksinkertaisemman muodon. Pinnan Riccin virtauksen analysointiin käytämme osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teorian menetelmiä, joita ensin yleistämme monistoille.
Osoitamme, että pinnalla Riccin virtauksella on aina yksikäsitteinen ratkaisu koko aikavälillä $[0, \infty)$ mille tahansa alkuhetken C^∞-metriikalle. Asymptoottisesti virtauksen ratkaisu pinnalla suppenee vakiokaarevuuden metriikkaan, minkä osoitamme erikoistapauksessa, jossa pinnan Eulerin karakteristika on negatiivinen. Erityisesti negatiivisen Eulerin karakteristikan pinta hyperbolisoituu. Pinnalla ratkaisu on konforminen alkuhetken metriikan kanssa, ja siten jokainen Riemannin metriikka pinnalla on konforminen vakiokaarevuuden metriikan kanssa.
Riccin virtaus vaikuttaa hyödylliseltä työkalulta, kun tutkitaan lokaalien suureiden kuten kaarevuuden kytkeytymistä topologiaan. Riccin virtauksen vahvuus on sen kaarevuutta tasoittavassa luonteessa ja siinä, että sen ratkaisu on olemassa minimaalisilla ehdoilla. Riccin virtauksen työkaluja käyttäen voi lähestyä differentiaaligeometrian ongelmia myös korkeammissa ulottuvuuksissa osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teorian avulla.

Sivumäärä: 47

Avainsanat: Riccin virtaus, hyperbolinen pinta, evoluutioyhtälö, vakiokaarevuuden metriikka, Poincarén konjektuuri, ratkaisun olemassaolo, ratkaisun suppeneminen, vakiokaarevuuden pinta, Eulerin karakteristika

Täytetään tiedekunnassa

Hyväksytty: **Kirjasto:**

HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Faculty of Information and Natural Sciences

ABSTRACT OF MASTER'S THESIS

Author:	Tony Liimatainen
Degree Programme:	Engineering Physics
Major subject:	Mathematics
Minor subject:	Applied Physics
Title:	Hyperbolising surfaces with the Ricci flow
Title in Finnish:	Pintojen hyperbolisointi Riccin virtauksen avulla
Chair:	Mat-1 Mathematics
Supervisor:	Professor Matti Lassas
Instructor:	Lecturer Kirsi Peltonen

Evolving a Riemannian metric of a manifold by using the Ricci flow has turned out to be a powerful tool in the study of differential geometry. The Ricci flow is an evolution equation of a Riemannian metric. Despite its nonlinear nature, it has similar properties with the heat equation. The Poincaré conjecture was proved using the Ricci flow in 2003.

We study the Ricci flow on surfaces and methods used also in the proof of the Poincaré conjecture become familiar. We study how a Riemannian metric on a surface evolves during the flow. We investigate under which assumptions the solution of the flow exists and on what time interval. We study how curvature behaves under the flow and to which kind of metric the solution of the flow converges asymptotically.

By using results from the general theory of the Ricci flow, we derive an existence theory for the solution of the flow. The derived theory holds in any dimension and we apply it in order to achieve a suitable existence theory for the solution on surfaces. Curvature simplifies on surfaces and the Gauss-Bonnet theorem connects the curvature of the surface to its topology. Using these remarks, the Ricci flow assumes a simpler form. To analyze the flow on surfaces, we use the methods of partial differential equations, which we first generalize to apply on manifolds.

We show that on manifolds the Ricci flow has a unique solution on the non-negative time interval $[0, \infty)$ for any initial time C^{∞}-metric. Asymptotically the solution of the flow converges to a metric of constant curvature, which we prove in the special case of negative Euler characteristic. Especially the surface becomes hyperbolic in the case of negative Euler characteristic. The solution of the flow is conformal to the initial time metric. Thus, every Riemannian metric is conformal to a metric of constant curvature.

The Ricci flow appears to be a useful tool for studying the relation between topology and local quantities, such as curvature. The Ricci flow has two key strengths. In addition to its nature of smoothening curvature, it has a solution for minimal conditions. By using the tools of the Ricci flow, one can approach the problems of differential geometry with the help of the theory of partial differential equations also in higher dimensions.

Number of pages: 47 **Keywords:** Ricci flow, hyperbolic surface, evolution equation, metric of constant curvature, Poincaré conjecture, existence of solution, surface of constant curvature, Euler characteristic

Department fills

Approved: **Library code:**

Esipuhe

Tämän diplomityön motivaationa on ollut tutustua Riccin virtaukseen ja siihen, miten sitä voi käyttää tutkittaessa moniston kaarevuuden kytkeytymistä topologiaan. Haluan esittää kiitokseni työn ohjaajalle lehtori Kirsi Peltoselle mielenkiintoisesta työn aiheesta ja tehokkaasta ohjaamisesta. Lisäksi haluan kiittää tutkijatohtori Mikko Saloa sekä professoreita Matti Lassas ja Juha Kinnunen hyödyllisistä kommenteista työn alkuvaiheessa. Erityisen kiitoksen ansaitsee kollegani Kurt Baarman, joka työn loppuvaiheessa tarjosi apuaan työn oikoluvussa.

Työ on tehty kesällä 2008 Teknillisessä korkeakoulussa Matematiikan ja systeemianalyysin laitoksella. Toivon, että lukija viihtyy aiheen parissa, oppii Riccin virtauksen perustekniikat ja jaksaa ihmetellä lokaalien suureiden kuten kaarevuuden kytkeytymistä topologiaan.

Espoo, 1. Elokuuta, 2008

Tony Liimatainen

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Riccin virtaus on Riemannin metriikan evoluutioyhtälö, jossa annettua alkuhetken metriikkaa kehitetään ajassa epälineaarisen osittaisdifferentiaaliyhtälön avulla. Se on alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t) &= -2Ric(g(t)) \\ g(0) &= g_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

missä g_0 on jokin moniston sileä Riemannin metriikka ja Ric on Riccin tensori. Sen esitteli Richard Hamilton vuonna 1982 julkaisussaan "Three-manifolds with positive Ricci curvature" [Ham82]. Siinä hän osoitti, että jokaisella aidosti positiivisen (Riccin) kaarevuuden monistolla on myös positiivinen vakiokaarevuuden metriikka. Vakiokaarevuuden metriikka löytyy kehittämällä annettua positiivisen kaarevuuden metriikkaa (normalisoidulla) Riccin virtauksella.

Julkaisu on Hamiltonin ohjelman ensimmäinen julkaisu. Hamiltonin ohjelman menetelmiä käyttäen voi lähestyä Thurstonin geometrisaatiokonjektuurin todentamista Riccin virtausta käyttäen. Thurstonin geometrisaatiokonjektuuri sisältää erikoistapauksenaan kuuluisan Poincarén konjektuurin. Tämän mukaan suljettu kolme-monisto, jolla on triviaali perusryhmä, on topologialtaan pallo S^3. Vuonna 2003 venäläinen Grisha Perelman teki huomattavan työn vahvistamalla Thurstonin geometrisaatiokonjektuurin Hamiltonin ohjelman tuloksiin nojaten.

Varsinaisesti metriikan kehittäminen käytettäessä Riccin virtauksen tekniikoita tapahtuu *normalisoidun* Riccin virtauksen avulla. Normalisoitu Riccin virtaus on kompaktin moniston alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t) &= \frac{2}{n} r(t) g(t) - 2Ric(g(t)) \\ g(0) &= g_0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

missä r on skalaarikaarevuuden R integraalikeskiarvo

$$r(t) = \int_M R(g(t)) d\mu \bigg/ \int_M d\mu \, . \tag{1.3}$$

Osoittautuu, että normalisoimaton (1.1) ja normalisoitu Riccin virtaus ovat monessa mielessä samanlaisia. Molemmat virtaukset tasoittavat Riccin kaarevuutta lämpöyhtälömäisesti, jota voi heuristisesti ajatella kuoppaisen pallon muokkaamista täydelliseksi palloksi. Niiden ratkaisujen olemassaoloteoriat ovat myös ekvivalentteja. Normalisoitu Riccin virtauks poikkeaa normalisoimattomasta kahdella keskeisellä tavalla. Normalisoitu Riccin virtaus säilyttää moniston tilavuuden ja sen kiintopisteet eivät ole ainoastaan häviävän Riccin kaarevuuden metriikoita. Jälkimmäisellä on suuri merkitys tarkasteltaessa ratkaisun pitkän ajan käyttäytymistä.

Tämä diplomityö jakautuu kahteen osaan. Ensimmäinen osa käsittelee Riccin virtauksen teoriaa yleisellä n-ulotteisella monistolla. Rakennamme siinä teorian, jota tarvitsemme tutkiessamme suljettuja kaksi-monistoja, eli pintoja. Tärkein alkuosan tulos on Riccin virtauksen ratkaisun pitkän ajan olemassaolon teoria. Riccin virtauksella on aina lyhen ajan yksikäsitteinen ratkaisu, mutta pitkän ajan olemassaoloa rajoittaa moniston kaarevuuden käyttäytyminen virtauksen aikana. Osoittautuu, että jos kaarevuus ei hajaannu millään ajan hetkellä, on Riccin virtauksella yksikäsitteinen ratkaisu aina alkuhetkestä eteenpäin. Alkuosassa osoitamme myös normalisoimattoman ja normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisujen yksikäsitteisen vastaavuuden.

Saatuamme yleisen teorian valmiiksi siirrymme tutkimaan pintoja. Kahdessa ulottuvuudessa Riemannin kaarevuus yksinkertaistuu huomattavasti, jolloin normalisoitu Riccin virtausyhtälö saa yksinkertaisemman muodon

$$\frac{\partial}{\partial t} g = (r - R)g. \tag{1.4}$$

Pinnoilla pätee myös Gaussin ja Bonnetin kaava [Lee87, Thm 9.7.]

$$\int_M R d\mu = 4\pi\chi(M), \tag{1.5}$$

missä $\chi(M)$ on pinnan Eulerin karateristika. Gaussin ja Bonnetin kaava kytkee pinnan topologian ja kaarevuuden toisiinsa. Näitä huomioita käyttämällä osoitamme, että skalaarikaarevuus säilyy rajoitettuna virtauksen aikana. Työn ensimmäisen osan nojalla Riccin virtauksella on pinnalla aina pitkän ajan ratkaisu.

Rajalla $t \to \infty$ normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu pinnalla suppenee vakiokaarevuuden metriikkaan. Tämän osoittamisen vaikeus riippuu pinnan topologiasta: positiivisen Eulerin karakteristikan tapauksessa vakiokaarevuuden metriikka on hylkivä kiintopiste, mikä monimutkaistaa analyysia. Tässä työssä osoitamme suppenemisen negatiivisen Eulerin karakteristikan tapauksessa. Ei-positiivisen tapauksen osoitti alunperin Hamilton vuonna 1988 [Ham88] ja positiivinen tapaus todistettiin vuonna 1991 uniformisaatiolauseeseen nojaten [Cho91]. Positiivinen tapaus todistettiin myös käyttämättä uniformisaatiolausetta vuonna 2006 [CLT06].

Riccin virtauksen tutkiminen kuuluu geometrisen analyysin matematiikan haaraan. Geometrinen analyysi tutkii differentiaaligeometriaa analyysin keinoja käyttäen ja kääntäen. Lukijalta oletetaan perustietoja näiltä matematiikan osa-alueilta, joskin oleellisinta on Riemannin geometrian perustyökalujen tunteminen. Työ perustuu Hamiltonin alkuperäiseen työhön aiheesta [Ham88] sekä artikkelin [CZ06] pohjalta tehtyyn Mikko Salon esitelmään. Lähdemateriaalina Riccin virtauksen tuloksiin on käytetty lähinnä kirjaa [CK04].

Ennen siirtymistä varsinaiseen asiaan tutustumme Riccin virtaukseen esimerkin kautta, jossa ratkaistaan normalisoimaton ja normalisoitu Riccin virtaus, kun alkuhetken metriikka on Einsteinin metriikka. Huomaamme myös, että jokainen Einsteinin metriikka on normalisoidun Riccin virtauksen kiintopiste.

Esimerkki 1.1. *(Einstenin metriikan Riccin virtaus) Oletetaan moniston M alkuhetken metriikka g_0 Einsteinin metriikaksi:*

$$Ric(g_0) = \lambda g_0. \tag{1.6}$$

Tehdään yrite

$$g(t) = u(t)g_0 \tag{1.7}$$

Riccin virtauksen ratkaisemiseksi. Metriikan skaalaaminen positiivisella vakiolla säilyttää Riccin kaarevuuden (Propositio A.4), joten sijoittaminen Riccin virtauksen yhtälöön (1.1) *antaa*

$$u'(t)g_0 = \frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric(g(t)) = -2Ric(g_0) = -2\lambda g_0. \tag{1.8}$$

Metriikka $g(t)$ on siten Riccin virtauksen ratkaisu, jos

$$\begin{aligned} u'(t) &= -2\lambda \\ u(0) &= 1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Eli

$$g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0. \tag{1.10}$$

Huomataan ratkaisusta seuraavat asiat: Jos $\lambda > 0$, eli monisto on esimerkiksi pallo, monisto kutistuu pisteeksi äärellisessä ajassa $t = \frac{1}{2\lambda}$. Jos $\lambda = 0$, kuten voi olla esimerkiksi toruksen tapauksessa, metriikka pysyy vakiona g_0. Ja jos $\lambda < 0$, kuten on hyperbolisella Einsteinin monistolla, metriikka kasvaa Riccin virtauksen aikana.

Tarkastellaan sitten vastaavaa tapausta normalisoidussa Riccin virtauksessa (1.2)*. Nyt saamme*

$$\begin{aligned} \frac{2}{n}r(g)g &= \frac{2}{n}\left(\int_M g^{ij}R_{ij}(g)d\mu \Big/ \int_M d\mu\right) g \\ &= \frac{2}{n}\left(\int_M \frac{1}{u(t)}g_0^{ij}R_{ij}(g_0)d\mu \Big/ \int_M d\mu\right) g \\ &= \frac{2}{n}\frac{1}{u(t)}\lambda\left(\int_M n d\mu \Big/ \int_M d\mu\right) g = \frac{2\lambda}{u(t)}g = 2\lambda g_0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sijoittamalla yhtälö (1.11) *normalisoidun Riccin virtauksen evoluutioyhtälöön tulee se muotoon*

$$u'(t)g_0 = \frac{\partial}{\partial t}g(t) = \frac{2}{n}r\left(g(t)\right)g(t) - 2Ric\left(g(t)\right) = 2\lambda g_0 - 2\lambda g_0 = 0, \tag{1.12}$$

jonka ratkaisu on

$$g(t) = g_0. \tag{1.13}$$

Löytämämme ratkaisu pysyy siis vakiona g_0*. Osoittautuu, että (normalisoidun) Riccin virtauksen ratkaisu on yksikäsitteinen, joten Einsteinin metriikka on normalisoidun Riccin virtauksen kiintopiste - normalisoitu Riccin virtaus, joka jonain hetkenä on Einsteinin metriikka, pysyy Einsteinin metriikkana siitä hetkestä eteenpäin.*

Luku 2

Notaatio ja Riemannin geometrian konventiot

Työssä noudatamme viitteen [Lee87] notaatiota. Tarkastelemme sileitä suunnistuvia Riemannin monistoja, M, tai vaihtoehtoisesti M^n, jos haluamme korostaa moniston ulottuvuutta n. Metriikalla tarkoitamme aina sileää (C^∞) Riemannin metriikkaa ellei toisin mainita.

Moniston M Riemannin metriikka g määrittelee moniston tangenttikimpun TM vektoreiden sisätulon

$$\langle U,V\rangle = g_{ij}U^iV^j, \quad U,V\in T_xM, \tag{2.1}$$

missä U^i ja V^i ovat vektoreiden U ja V komponentit koordinaattikannassa. Yllä olemme käyttäneet Einsteinin summaussääntöä. Käytämme sitä myös jatkossa.

Metriikka määrittelee sisätulon myös kotangenttikimpun $T^*M \equiv T^1M$ kovektoreille

$$\langle \omega,\sigma\rangle = g^{ij}\omega_i\sigma_j, \qquad \omega,\sigma\in T^*_xM \tag{2.2}$$

sekä yleisemmin tensoreille $A,B\in T^k_{l\,x}M$

$$\langle A,B\rangle = g^{i_1j_1}\cdots g^{i_kj_k}g_{i_{k+1}j_{k+1}}\cdots g_{i_{k+l}j_{k+l}}A^{i_{k+1}\cdots i_{k+l}}_{i_1\cdots i_k}B^{j_{k+1}\cdots j_{k+l}}_{j_1\cdots j_k}. \tag{2.3}$$

Yllä T^k_lM on $\binom{k}{l}$-tensoreiden

$$F:\underbrace{T^*M\times\cdots\times T^*M}_{l\ kpl}\times\underbrace{TM\times\cdots\times TM}_{k\ kpl}\longrightarrow\mathbb{R} \tag{2.4}$$

vektorikimppu. Käytämme sisätuloille samaa kulmasulkumerkintää $<\cdot,\cdot>$ riippumatta siitä ovatko argumentit vektoreita, kovektoreita vai $\binom{k}{l}$-tensoreita. Selviää asiayhteydestä, mitä sisätuloa kulloinkin tarkoitetaan.

Sisätulo yleistyy vektori- ja kovektorikenttien avaruuksiin $\mathcal{T}(M)$ ja $\mathcal{T}^1(M)$ sekä $\binom{k}{l}$-tensorikenttien $\mathcal{T}^k_l(M)$ avaruuteen normaalilla tavalla. Jatkossa emme yleensä sanallisesti erottele vektorikimppuja niiden kenttien eli sektioiden avaruuksista. Jos esimerkiksi puhumme $\binom{k}{l}$-tensorista F, tarkennamme sen merkityksen tarvittaessa merkitsemällä $F\in T^k_lM$ tai $F\in\mathcal{T}^k_l(M)$.

Tensorin $A \in \mathcal{T}^k_l(M)$ normin neliö on tensorin sisätulo itsensä kanssa,

$$|A|^2_g = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} g_{i_{k+1} j_{k+1}} \cdots g_{i_{k+l} j_{k+l}} A^{i_{k+1} \cdots i_{k+l}}_{i_1 \cdots i_k} A^{j_{k+1} \cdots j_{k+l}}_{j_1 \cdots j_k}. \tag{2.5}$$

Integrointi monistolla määritellään metriikan määräämän mitan

$$d\mu = \sqrt{\det g} dx \tag{2.6}$$

suhteen.

Lineaarinen konnektio ∇ määrittää kovariantin derivaatan $\binom{k}{l}$-tensorikentiltä $\binom{k+1}{l}$-tensorikentille:

$$\nabla F(\omega^1, \dots \omega^l, U_1, \dots, U_k, X) = \nabla_X F(\omega^1, \dots \omega^l, U_1, \dots, U_k), \tag{2.7}$$

missä $F \in \mathcal{T}^k_l(M)$, $\omega^i \in \mathcal{T}^1(M)$ ja $X, U_i \in \mathcal{T}(M)$. Lokaaleissa koordinaateissa

$$\nabla_i \partial_j \equiv \nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k, \tag{2.8}$$

missä Γ^k_{ij} ovat konnektion Christoffelin symbolit. Christoffelin symboleita käyttäen tensorin $F \in \mathcal{T}^k_l(M)$ kovariantin derivaatan komponentit voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\nabla_m F^{j_1 \cdots j_l}_{i_1 \cdots i_k} = \partial_m F^{j_1 \cdots j_l}_{i_1 \cdots i_k} + \sum_{s=1}^{l} \Gamma^{j_s}_{ma} F^{j_1 \cdots a \cdots j_l}_{i_1 \cdots i_k} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma^a_{m i_s} F^{j_1 \cdots j_l}_{i_1 \cdots a \cdots i_k}. \tag{2.9}$$

Erityisesti kovektorin $\omega \in \mathcal{T}^1(M)$ ja tensorin $F \in \mathcal{T}^2_0(M)$ kovarianttien derivaattojen komponentit ovat

$$\nabla_i \omega_j = \partial_i \omega_j - \Gamma^k_{ij} \omega_k \tag{2.10}$$

ja

$$\nabla_i F_{jk} = \partial_i F_{jk} - \Gamma^a_{ij} F_{ak} - \Gamma^a_{ik} F_{ja}. \tag{2.11}$$

Konnektio, jota työssä käytämme, on aina Levi-Civitan lineaarinen konnektio. Levi-Civitan konnektio on symmetrinen,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \tag{2.12}$$

ja yhteensopiva metriikan kanssa,

$$\nabla g = 0. \tag{2.13}$$

Sen Christoffelin symbolit voidaan laskea lokaaleissa koordinaateissa kaavasta

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right). \tag{2.14}$$

Käyttämämme kaarevuussuureet määritellään seuraavasti: Riemannin kaarevuustensori, $Rm \in \mathcal{T}^4_0(M)$, määritellään kaavalla

$$Rm(X, Y, Z, W) = \left\langle \left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \right) Z, W \right\rangle, \tag{2.15}$$

missä $X, Y, Z, W \in \mathcal{T}(M)$. Riemannin kaarevuustensorin komponentit lokaaleissa koordinaateissa ovat

$$R_{ijkl} = \left\langle \left(\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j} - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\right)\partial_k, \partial_l \right\rangle = \left\langle R_{ijk}^m \partial_m, \partial_l \right\rangle = g_{ml} R_{ijk}^m. \tag{2.16}$$

Komponentit R_{ijk}^m, jotka on siis saatu nostamalla Riemannin kaarevuustensorin komponenttien viimeinen indeksi, voidaan laskea kaavasta

$$R_{ijk}^m = \partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{ia}^m \Gamma_{jk}^a - \Gamma_{ja}^m \Gamma_{ik}^a. \tag{2.17}$$

Komponenttien määräämää $\binom{3}{1}$-tensorikenttää kutsutaan (Riemannin) kaarevuusendomorfismiksi.

Riccin kaarevuus $Ric \in \mathcal{T}_0^2(M)$, joka tässä työssä esiintyy erityisesti Riccin virtauksen evoluutioyhtälössä, on kontraktio Riemannin kaarevuustensorista ensimmäisen ja viimeisen indeksin suhteen,

$$R_{ij} = g^{kl} R_{kijl}. \tag{2.18}$$

Edelleen skalaarikaarevuus $R \in C^\infty(M)$ on kontraktio Riccin kaarevuudesta,

$$R = g^{ij} R_{ij} \equiv \mathrm{Tr}\left(g^{-1} Ric\right), \tag{2.19}$$

ja keskimääräinen skalaarikaarevuus r sen integraalikeskiarvo,

$$r = \int_M R\, d\mu \bigg/ \int_M d\mu = \int_M R\, d\mu \,/ \mathrm{Vol}(M)\,. \tag{2.20}$$

Lopuksi määrittelemme kaksi derivaattaoperaattoria. Kovariantti Laplacen operaattori $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, määritellään kaavalla

$$\Delta u = \nabla^i \nabla_i u = g^{ij} \nabla_i \nabla_j u = g^{ij}(\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k \partial_k) u, \tag{2.21}$$

ja tensorin $F \in \mathcal{T}_0^k(M)$ divergenssi $\mathrm{div} : \mathcal{T}_0^k(M) \to \mathcal{T}_0^{k-1}(M)$ kontraktiona tensorin ∇F kahden ensimmäisen indeksin suhteen:

$$(\mathrm{div} F)_{i_1 \cdots i_{k-1}} = g^{ij} \nabla_i F_{j i_1 \cdots i_{k-1}}. \tag{2.22}$$

Erityisesti Laplacen operaattori esiintyy luonnollisesti tarkastelemissamme evoluutioyhtälöissä. Näissä yhtälöissä metriikka muuntuu ajassa, mistä johtuen joskus kirjoitamme $\Delta = \Delta_g = \Delta_{g(t)}$ korostaakseemme Laplacen operaattorin aikariippuvuutta näissä tapauksissa.

Luku 3

Yleistä Riccin virtauksesta

Tässä luvussa tarkastelemme Riccin virtauksen piirteitä yleisessä ulottuvuudessa $n > 1$. Normalisoimattoman Riccin virtauksen evoluutioyhtälö metriikalle on

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g &= -2Ric(g) \\ g(0) &= g_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ja normalisoitu Riccin virtausyhtälö on

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g &= \frac{2}{n} r g - 2Ric(g) \\ g(0) &= g_0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

missä

$$r = \int_M R \, d\mu \bigg/ \int_M d\mu \,. \tag{3.3}$$

Normalisoimattoman Riccin virtauksen, jota kutsumme lyhyemmin myös Riccin virtaukseksi, ja normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisut monistolla M^n ovat läheisessä yhteydessä toisiinsa. Ne eroavat toisistaan ainoastaan ajan t parametrisoinnilla ja avaruuden skaalauksella. Erityisesti niiden ratkaisun olemassaoloteoriat ovat ekvivalentteja keskenään. Ratkaisun olemassaoloteoria ja ratkaisujen ekvivalenssi edellä kuvatussa mielessä ovat tämän luvun pääteema. Aloitamme osoittamalla, että normalisoitu Riccin virtaus säilyttää nimensä mukaisesti moniston tilavuuden:

Propositio 3.1. *Olkoon $g(t)$ normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu. Tällöin moniston tilavuus $Vol(M)$,*

$$Vol(M) = \int_M d\mu_t, \tag{3.4}$$

on vakio ajassa.

Todistus. Käyttämällä identiteettiä (Propostio A.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \det g = \mathrm{Tr}\left(g^{-1} \frac{\partial}{\partial t} g \right), \tag{3.5}$$

voimme laskea

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_M d\mu_t &= \frac{\partial}{\partial t}\int_M \sqrt{\det g}\, dx = \int_M \left[\frac{\partial}{\partial t}\ln\sqrt{\det g}\right]\sqrt{\det g}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_M \left(\frac{\partial}{\partial t}\ln\det g\right) d\mu_t = \frac{1}{2}\int_M g^{ij}\left(\frac{2}{n} r g_{ij} - 2R_{ij}\right) d\mu_t \qquad (3.6) \\ &= \int_M (r-R) d\mu_t = 0.\end{aligned}$$

□

Tilavuus siis säilyy normalisoidussa Riccin virtauksessa ja erityisesti mitta toteuttaa evoluutioyhtälön

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu_t = (r-R) d\mu_t, \tag{3.7}$$

kuten voimme proposition todistuksesta huomata. Normalisoimattomalle Riccin virtaukselle voimme vastaavasti laskea

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu_t = -R\, d\mu_t. \tag{3.8}$$

Jatkossa jätämme mitan aikariippuvuuden merkitsemättä.

3.1 Normalisoimattoman ja normalisoidun Riccin virtauksen ekvivalenssi

Selvitämme seuraavaksi eksplisiittisesti normalisoimattoman ja normalisoidun Riccin virtauksen yksikäsitteisen vastaavuuden, jonka jälkeen siirrymme ratkaisun olemassaoloteorian pariin. Laskeaksemme miten virtaukset vastaavat toisiaan, määrittelemme aluksi ajasta t riippuvan avaruuden skaalauksen eli konformisen muunnoksen

$$\widetilde{g} := \psi g, \tag{3.9}$$

missä funktio $\psi(t) > 0$ valitaan siten, että

$$\int_M d\widetilde{\mu} = 1, \quad t \geq 0. \tag{3.10}$$

Yllä $d\widetilde{\mu}$ on metriikan $\widetilde{g}$ suhteen laskettu tilavuusmuoto. Vaadittu ψ on olemassa, sillä

$$1 = \int_M d\widetilde{\mu} = \psi^{n/2}(t)\int_M d\mu, \tag{3.11}$$

on yhtäpitävää yhtälön

$$\psi(t) = \left(\int_M d\mu\right)^{-2/n} > 0 \tag{3.12}$$

kanssa. Avaruuden skaalamisen lisäksi parametrisoimme ajan uudelleen seuraavasti

$$\widetilde{t}(t) := \int_0^t \psi(s)\, ds. \tag{3.13}$$

Riccin tensori on säilyy avaruuden skaalaamisessa (Propositio A.4),

$$Ric(g) = Ric(cg) \tag{3.14}$$

kaikilla positiivisilla vakion c arvoilla, joten

$$Ric(\widetilde{g}) = Ric(g). \tag{3.15}$$

Tästä seuraa, että pätee

$$R(\widetilde{g}) = \widetilde{g}^{ij} R_{ij}(\widetilde{g}) = \frac{1}{\psi} R(g), \tag{3.16}$$

sillä

$$\widetilde{g}^{-1} = \frac{1}{\psi} g^{-1}. \tag{3.17}$$

Edelleen laskemme konformisesti muunnetun ja muuntamattoman keskimääräisen skalaarikaarevuuden suhteen toisiinsa:

$$\begin{aligned} r(\widetilde{g}) &= \int_M R(\widetilde{g})\, d\widetilde{\mu} \Big/ \int_M d\widetilde{\mu} = \frac{1}{\psi} \int_M R(g)\, d\widetilde{\mu} \\ &= \frac{1}{\psi} \psi^{n/2} \int_M R(g)\, d\mu = \frac{1}{\psi} r(g). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Osoitamme seuraavaksi, että määrittelemämme avaruuden skaalaus ja ajan uudelleen parametrisointi määrittävät normalisoimattoman ja normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisujen yksikäsitteisen vastaavuuden. Siten ratkaisut ovat ekvivalentteja siinä mielessä, että toisen ratkaisu antaa automaattisesti myös toisen ratkaisun.

Propositio 3.2. *Olkoon $g(t)$ normalisoimattoman Riccin virtauksen ratkaisu välillä $[0, T)$. Tällöin*

$$g_N(t) := \left(\widetilde{g} \circ \widetilde{t}^{-1}\right)(t) \equiv \left((\psi g) \circ \widetilde{t}^{-1}\right)(t) \tag{3.19}$$

on normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu välillä $\left[0, \widetilde{t}^{-1}(T)\right)$.

Kääntäen, jos $g_N(t)$ on normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu välillä $[0, T_N)$, niin

$$g(t) := \frac{1}{\psi(t)} \left(g_N \circ \widetilde{t}\right)(t) \tag{3.20}$$

on normalisoimattoman Riccin virtauksen ratkaisu välillä $\left[0, \widetilde{t}(T_N)\right)$.

Todistus. Olkoon $g(t)$ normalisoimattoman Riccin virtauksen ratkaisu välillä $[0, T)$. Koska $\psi(t)$ on aidosti positiivinen,

$$\widetilde{t}(t) = \int_0^t \psi(s) ds \tag{3.21}$$

on aidosti kasvava. Niinpä sillä on aidosti kasvava käänteisfunktio, joka kuvaa välin $[0, T)$ väliksi $\left[0, \widetilde{t}^{-1}(T)\right)$.

Derivoimalla metriikkaa g_N ajan suhteen, ketju- ja käänteisfunktion derivoimissääntöä käyttäen, saamme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g_N(t) &= \frac{\partial\widetilde{g}(s)}{\partial s}\bigg|_{s=\widetilde{t}^{-1}(t)}\frac{\partial\widetilde{t}^{-1}(t)}{\partial t} = \frac{\partial(\psi(s)g(s))}{\partial s}\bigg|_{s=\widetilde{t}^{-1}(t)}\frac{1}{\partial_s\widetilde{t}(s)}\bigg|_{s=\widetilde{t}^{-1}(t)}\\ &= \left[-2Ric(g(s))\psi(s)+\frac{\partial\psi(s)}{\partial s}g(s)\right]\frac{1}{\psi(s)}\bigg|_{s=\widetilde{t}^{-1}(t)}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Derivoimalla yhtälöä (3.12) saamme

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(s)}{\partial s} &= -\frac{2}{n}\left(\int_M d\mu\right)^{-2/n-1}\int_M\frac{\partial}{\partial s}d\mu\\ &= -\frac{2}{n}\frac{\psi(s)}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M -R(g(s))d\mu = \frac{2}{n}\psi(s)r(g(s)).\end{aligned}\tag{3.23}$$

Niinpä yhtälö (3.22) sievenee muotoon

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g_N(t) &= \left(\frac{2}{n}r\left(g(s)\right)g(s)-2Ric\left(g(s)\right)\right)\bigg|_{s=\widetilde{t}^{-1}(t)}\\ &= \frac{2}{n}r(g_N(t))g_N(t)-2Ric(g_N(t)),\end{aligned}\tag{3.24}$$

missä viimeisellä rivillä on käytetty identiteettiä $r(g)g = r(\widetilde{g})\widetilde{g}$ ja ehtoa (3.15).

Olemme osoittaneet, että $g_N(t)$ ratkaisee normalisoidun Riccin virtauksen välillä $\left[0, \widetilde{t}^{-1}(T)\right)$. Käänteinen puoli osoitetaan vastaavalla laskulla. $\square$

3.2 Riccin virtauksen ratkaisun olemassaoloteoria

Seuraavassa luvussa aloitamme normalisoidun Riccin virtauksen tutkimisen pinnoilla. Oleellista tutkimuksemme kannalta tulee olemaan virtauksen ratkaisun pitkän ajan olemassaolo, jolla tarkoitetaan, että ratkaisu on olemassa välillä $[0,\infty)$. Etsimme tässä kappaleessa riittävät ehdot ratkaisun pitkän ajan olemassaololle. Kokonaisuudessaan (normalisoidun) Riccin virtauksen olemassaoloteoria osoittautuu työlääksi tehtäväksi, minkä vuoksi viittaamme sopivissa kohdissa muutamiin yleisiin tuloksiin. Rajoittuminen kahteen ulottuvuuteen ei helpota työtämme tältä osin.

Työtämme helpottaa edellisessä propositiossa saatu vastaavuus normalisoimattoman ja normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisujen välillä. Sen nojalla on ilmeistä, että normalisoidun virtauksen lyhyen ajan olemassaoloa varten riittää tutkia normalisoimatonta virtausta ja kääntäen. Vastaava pätee myös ratkaisun pitkän ajan olemassaololle, ja johdammekin ratkaisun pitkän ajan olemassaoloteorian aluksi normalisoimattomalle virtaukselle, jonka jälkeen osoitamme vastaavan teorian pätevän myös normalisoidulle virtaukselle. Aloitamme teorian ratkaisun lyhyen ajan olemassaololauseella.

Lause 3.3. *(Ratkaisun lyhyen ajan olemassaolo) Jos* (M^n, g_0) *on suljettu Riemannin monisto, niin Riccin virtauksella*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g &= -2Ric(g) \\ g(0) &= g_0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu jollakin positiivisella aikavälillä $[0, \epsilon)$ *siten, että* $g(0) = g_0$.

Sivuutamme lauseen vaativan todistuksen. Alkuperäinen todistus löytyy Hamiltonin julkaisusta [Ham82], jossa lause on todistettu käyttäen abstraktia Nashin ja Moserin käänteiskuvauslausetta. Suoraviivaisempaa todistusta varten katso kirjan [CK04] Lause 3.13, jossa käytetään niin sanottua DeTurckin temppua.

Taktiikkamme pitkän ajan ratkaisun olemassaolon todistamiseksi on seuraava: Edellinen lause antaa meille ratkaisun pienellä välillä $[0, \epsilon)$. Osoittamalla, että ratkaisu $g(t)$ suppenee, kun aika t lähestyy välin päätepistettä ϵ, löydämme uuden metriikan $g(\epsilon)$. Metriikasta $g(\epsilon)$ voimme aloittaa uuden Riccin virtauksen ja ratkaisun yksikäsitteisyyden nojalla ratkaisu jatkuu siis pidemmälle - itseasiassa koko välille $[0, \infty)$.

Aloitamme raja-arvon $g(\epsilon)$ tutkimisen lemmalla, joka antaa riittävän ehdon jatkuvan raja-arvometriikan olemassaololle. Lemman oletus koskee metriikan aikaderivaatan rajoittuneisuutta virtauksen aikana, mikä on tietenkin sama asia kuin Riccin tensorin rajoittuneisuus virtauksen aikana. Myös raja-arvometriikan sileys seuraa lopulta kaarevuuden *a priori* rajoista. Ennen lemmaa määrittelemme ensin, mitä tarkalleen tarkoitamme metriikan suppenemisella.

Määritelmä 3.4. *Olkoon* $g(t)$, $t \in [0, T)$, *perhe metriikoita monistolla* M. *Perheellä on raja-arvo* $g(T)$, *jos* $g(T)$ *on metriikka, jonka komponenteille pätee*

$$g_{ij}(t) \longrightarrow g_{ij}(T), \quad t \to T. \tag{3.26}$$

Sanotaan, että $g(t)$ *suppenee metriikkaan* $g(T)$ *ja merkitään* $g(t) \to g(T)$.

Jos lisäksi komponentit suppenevat tasaisesti moniston M *suhteen, tai yleisemmin avaruudessa* $C^k(M)$, *sanotaan että suppeneminen on tasaista, tai että se tapahtuu avaruudessa* C^k.

Lemma 3.5. *Olkoon* M *kompakti Riemannin monisto ja* $g(t)$ *yksiparametrinen perhe metriikoita joukossa* $[0, T)$. *Jos on olemassa vakio* $C < \infty$ *siten, että*

$$\int_0^T \sup_{x \in M} \left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right|_{g(t)} dt \leq C, \tag{3.27}$$

niin $g(t)$ *suppenee tasaisesti metriikkaan* $g(T)$, *kun* $t \to T$. *Erityisesti rajametriikka* $g(T)$ *on jatkuva.*

Yllä $\left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \right|_{g(t)}$ *on tensorin* $\frac{\partial g}{\partial t}$ *normi pisteessä* x *hetkellä* t *metriikan* $g(t)$ *suhteen (vertaa yhtälöön* (2.5)*).*

Todistus. Olkoon $x \in M$, $V \in T_xM$ ja $0 \leq t_1 \leq t_2 < T$. Nyt on voimassa

$$\begin{aligned}\left|\ln\left(\frac{g(t_2,x)(V,V)}{g(t_1,x)(V,V)}\right)\right| &= \left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial s}\left[\ln(g(s,x)(V,V)\right]ds\right| \\ &= \left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{g(s,x)(V,V)}\frac{\partial}{\partial s}g(s,x)(V,V)ds\right| \\ &\leq \int_{t_1}^{T}\left|\left[\frac{\partial}{\partial s}g(s,x)\right]\left(\frac{V}{|V|_s},\frac{V}{|V|_s}\right)\right|ds.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Koska $V/|V|_s$ on $g(s)$-yksikkövektori, niin liitteen Proposition A.2 nojalla pätee arvio

$$\left|\left[\frac{\partial}{\partial s}g(s,x)\right]\left(\frac{V}{|V|_s},\frac{V}{|V|_s}\right)\right| \leq \left|\frac{\partial}{\partial s}g(s,x)\right|_{g(s)}, \tag{3.29}$$

jota käyttämällä saamme

$$\left|\ln\left(\frac{g(t_2,x)(V,V)}{g(t_1,x)(V,V)}\right)\right| \leq \int_{t_1}^{T}\left|\frac{\partial}{\partial s}g(s,x)\right|_{g(s)}ds \leq C. \tag{3.30}$$

Epäyhtälön oikea puoli on rajoitettu parametrin t_1 laskeva jono, joka suppenee arvoon 0, kun $t_1 \to T$. Niinpä $g(t,x)(V,V)$ muodostaa Cauchyn jonon, joka siten suppenee rajalla $t \to T$. Suppeneminen on tasaista avaruudessa $M \times TM$, koska majorantti ei riipu vektorista V ja M on kompakti. Olemme osoittaneet, että

$$g(t,x)(V,V) \xrightarrow{t\to T} g(T,x)(V,V), \quad C(M \times TM). \tag{3.31}$$

Edelleen suunnikassäännöstä seuraa

$$\begin{aligned}g(t,x)(U,V) &= \frac{1}{4}\left[g(t,x)(U+V,U+V) - g(t,x)(U-V,U-V)\right] \\ &\xrightarrow{t\to T} \frac{1}{4}\left[g(T,x)(U+V,U+V) - g(T,x)(U-V,U-V)\right] \\ &= g(T,x)(U,V)\end{aligned} \tag{3.32}$$

kaikille $U, V \in TM$. Tensori $g(T)$ on siten symmetrinen, ja suppenemisen tasaisuudesta johtuen myös jatkuva. Erityisesti metriikoiden $g(t)$ komponentit suppenevat tasaisesti tensorin $g(T)$ komponentteihin:

$$g_{ij}(t) = g(t,x)(\partial_i,\partial_j) \to g(T,x)(\partial_i,\partial_j) = g_{ij}(T), \quad C(M). \tag{3.33}$$

Asetetaan seuraavaksi $t_1 = 0$ ja $t_2 = T$ epäyhtälössä (3.30), josta saamme

$$\left|\ln\left(\frac{g(T,x)(V,V)}{g(0,x)(V,V)}\right)\right| \leq C. \tag{3.34}$$

Eksponentioimalla yllä olevan päädymme lausekkeeseen

$$e^{-C}g(0,x)(V,V) \leq g(T,x)(V,V) \leq e^{C}g(0,x)(V,V). \tag{3.35}$$

Vasen puoli epäyhtälöstä osoittaa, että tensori $g(T)$ on positiividefiniitti, ja oikea puoli osoittaa, että se on rajoitettu. $\square$

Kun Riccin tensorin normi on rajoitettu virtauksen aikana, edellisen nojalla on olemassa jatkuva rajametriikka. Jotta uusi Riccin virtaus voi alkaa rajametriikasta, sen täytyy lisäksi olla sileä. Osoittautuu, että suljetulla monistolla riittävä ehto on Riemannin kaarevuuden rajoittuneisuus

$$|Rm(t)|_{g(t)} \leq C < \infty \tag{3.36}$$

virtauksen aikana. Tällöin metriikan ja Riccin tensorin kovariantit derivaatat ovat rajoittettuja, mistä lopulta seuraa rajametriikan sileys.

Voidaan osoittaa, että Riemannin kaarevuuden rajoittuneisuus seuraa, että metriikka ja Riccin tensorin kovariantit derivaatat ovat myös rajoittuja. Tuloksen osoittaminen on joukko työläitä laskuja ja käyttää niin sanottuja Shin derivaatta-arvioita. Otamme tuloksen käyttöön ilman todistuksia. Todistukset ja Shin derivaattaestimaatit löytyvät jälleen kirjasta [CK04, Prop 6.48, Cor 6.51, Thm 7.1].

Lause 3.6. *Olkoon M^n kompakti monisto ja $(M^n, g(t))$ Riccin virtauksen ratkaisu välillä $[0,T)$. Olkoon $\overline{g}$ lisäksi mielivaltainen metriikka monistolla M^n ja $\overline{\nabla}$ sitä vastaava konnektio. Jos on olemassa vakio $K < \infty$ siten, että*

$$|Rm(t,x)|_{g(t)} \leq K, \quad x \in M^n,\ t \in [0,T), \tag{3.37}$$

niin tällöin jokaiselle $m \in \mathbb{N}$ on olemassa vakio $C_m < \infty$, jolle pätee

$$\left|\overline{\nabla}^m g(x,t)\right|_{\overline{g}} \leq C_m, \quad x \in M^n,\ t \in [0,T) \tag{3.38}$$

ja

$$\left|\overline{\nabla}^m Ric(x,t)\right|_{\overline{g}} \leq C_m, \quad x \in M^n,\ t \in [0,T). \tag{3.39}$$

Ennen pitkän ajan ratkaisun olemassaololausetta tarvitsemme kohtalaisen ilmeisen seurauksen edellisestä:

Korollaari 3.7. *Edellisen lauseen oletusten ollessa voimassa metriikan ja Riccin tensorin komponenteille sekä kaikille multi-indeksille $\alpha = (a_1, \ldots, a_r)$, $|\alpha| = m$, pätee*

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x)\right| < C_m, \quad x \in M^n,\ t \in [0,T) \tag{3.40}$$

ja

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} R_{ij}(x)\right| < C_m, \quad x \in M^n,\ t \in [0,T) \tag{3.41}$$

virtauksen aikana. Vakiot $C_m < \infty$ voivat poiketa edellisen lauseen arvoista.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla derivoinnin asteen m suhteen. Olkoon $\overline{g}$ jokin metriikka monistolla M^n. Tapaus $m = 1$ on ilmeinen edellisen lauseen nojalla: Olkoon $x \in M^n$ ja (U, φ) x-keskiset $\overline{g}$-normaalikoordinaatit ja $a \in \{1, \ldots, n\}$. Nyt pätee

$$\begin{aligned}(\partial_a g_{ij}(t,x))^2 &\leq \delta^{jl}\overline{\nabla}_a g_{il}(t,x)\delta^{ik}\overline{\nabla}_a g_{jk}(t,x) = \overline{g}^{jl}(x)\overline{g}^{ik}(x)\overline{\nabla}_a g_{il}(t,x)\overline{\nabla}_a g_{jk}(t,x) \\ &= \left|\overline{\nabla}_a g(t,x)\right|_{\overline{g}}^2 \leq C_1^2.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Niinpä $|\partial_a g_{ij}(t,x)| \leq C_1$ on voimassa kaikilla $x \in M^n$. Vastaavasti osoitetaan, että pätee $|\partial_a R_{ij}(t,x)| \leq C_1$ kaikilla $x \in M^n$.

Oletetaan sitten, että väite on voimassa, kun $m \leq k$, ja osoitetaan, että se on tällöin voimassa myös tapauksessa $m = k+1$. Kuten edellä saamme väitteen oletuksen nojalla rajoitettua tensorin $\overline{\nabla}^{k+1} g \in \mathcal{T}_0^{k+3}(M)$ komponentit moniston pisteestä x riippumattomalla vakiolla:

$$\left|(\overline{\nabla}^{k+1} g)_{l_1,\dots,l_{k+1}ij}\right| \leq C_{k+1}. \tag{3.43}$$

Toisaalta voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}^{k+1} g)_{l_1,\dots,l_{k+1}ij} = {} & \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^\alpha \partial x^{l_{k+1}}} g_{ij} \\ & + \text{termejä, jotka ovat korkeintaan astetta } k \\ & \text{derivaatoissa koordinaattien suhteen,}\end{aligned} \tag{3.44}$$

missä $\alpha = (l_1, \dots, l_k)$. Koska induktio-oletuksen nojalla termit, jotka ovat korkeintaan astetta k derivaatoissa koordinaattien suhteen, ovat rajoitettuja, saamme arvion

$$\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^\alpha \partial x^{l_{k+1}}} g_{ij}\right| \leq C_{k+1}, \tag{3.45}$$

jollain yhtälöstä (3.43) poikkeavalla vakiolla $C_{k+1} < \infty$. Riccin tensorin komponenttien R_{ij} osittaisderivaattojen rajoittuneisuus todistetaan samalla tavalla. □

Olemme valmiita osoittamaan ratkaisun pitkän ajan olemassaololauseen.

Lause 3.8. *(Ratkaisun pitkän ajan olemassaolo) Olkoon M^n kompakti Riemannin monisto. Oletetaan, että jos $g(t)$ on Riccin virtauksen ratkaisu mielivaltaisella välillä $[0,T)$, niin on olemassa vakio $C_T < \infty$ siten, että virtauksen aikana*

$$|Rm(t,x)|_{g(t)} \leq C_T < \infty, \quad x \in M^n. \tag{3.46}$$

Vakio C_T voi riippua välistä $[0,T)$. Tällöin Riccin virtauksella on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu aikavälillä $[0,\infty)$.

Todistus. Olkoon $g(t)$ Riccin virtauksen yksikäsitteinen ratkaisu maksimaalisella välillä $[0,T)$. Tehdään vastaoletus: $T < \infty$. Koska $|Rm(t,x)|_{g(t)} \leq C_T$ välillä $[0,T)$, niin myös Riccin tensorin normi on rajoitettu (Propositio A.3) tällä välillä. Toisaalta Riccin tensori on kerrannainen metriikan $g(t)$ aikaderivaatasta, joten pätee

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right|_{g(t)} < C < \infty, \quad t \in [0,T). \tag{3.47}$$

Lemman 3.5 nojalla $g(t)$ suppenee jatkuvaan metriikkaan $g(T)$, kun $t \to T$. Siten voimme kirjoittaa

$$g_{ij}(T) = g_{ij}(t) - 2\int_t^T R_{ij}(s)ds. \tag{3.48}$$

Olkoon $\alpha = (a_1, \dots a_r)$ jokin multi-indeksi, $|\alpha| = m$. Korollaarin 3.7 nojalla termit

$$\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} g_{ij} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} R_{ij} \tag{3.49}$$

ovat tasaisesti rajoitettuja välillä $[0, T)$. Siten derivoimalla yhtälöä (3.48) saamme

$$\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, T) = \frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, t) - 2 \int_t^T \frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} R_{ij}(x, s) ds. \tag{3.50}$$

Niinpä $g_{ij}(T)$ on m kertaa jatkuvasti derivoituva ja lisäksi saamme

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, T) - \frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, t) \right| \le C(T - t). \tag{3.51}$$

Epäyhtälön oikea puoli häviää tasaisesti rajalla $t \to T$, joten pätee

$$\frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, t) \longrightarrow \frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} g_{ij}(x, T), \quad C^m(M^n). \tag{3.52}$$

Koska multi-indeksi α oli mielivaltainen, olemme osoittaneet

$$g_{ij}(t) \longrightarrow g_{ij}(T), \quad C^\infty(M^n). \tag{3.53}$$

Olkoon sitten $\overline{g}(t)$ Riccin virtauksen ratkaisu välillä $[T, T + \epsilon)$ lähtien metriikasta $g(T)$. Koska ratkaisu on yksikäsitteinen, on $\overline{g}(t)$ metriikan $g(t)$ jatko välille $[T, T + \epsilon)$. Niinpä väli $[0, T)$ ei ole maksimaalinen ratkaisuväli ja päädyimme ristiriitaan. Täytyy siis olla $T = \infty$. □

Edellinen lause antaa riittävän ehdon normalisoimattoman Riccin virtauksen ratkaisun pitkän ajan olemassaololle. Seuraavat huomiot osoittavat, että vastaava lause pätee myös normalisoidulle virtaukselle: Kaarevuusendomorfismin komponentit R_{ijl}^k ovat invariantteja avaruuden skaalaamisessa (Propositio A.4), joten

$$|Rm\,(g_N)|^2_{g_N} = \left(\psi^{-2} \, |Rm\,(g)|^2_g \right) \circ \widetilde{t}^{-1}, \tag{3.54}$$

missä $g_N(t)$ on siis Propositiossa 3.2 määritelty vastaavuus normalisoidun ja normalisoimattoman Riccin virtauksen välillä

$$g_N(t) = \left((\psi g) \circ \widetilde{t}^{-1} \right)(t). \tag{3.55}$$

Funktion ψ potenssi (-2) seuraa tensorinormin määritelmästä ja indeksin laskemisesta.

Funktio ψ on aina positiivinen ja rajoitettu Riccin virtauksen aikana. Jos siis normalisoimattoman Riccin virtauksen kaarevuustensorin normi on rajoitettu välillä $[0, T)$, myös normalisoidun Riccin virtauksen kaarevuustensorin normi on rajoitettu välillä $\left[0, \widetilde{t}(T)\right)$. Lisäksi ajan parametrisointi on bijektio väliltä $[0, \infty)$ itselleen, joten väittämät

$$|Rm(g_N(t))|_{g_N(t)} < C_T \quad \text{kaikilla väleillä } [0, T) \tag{3.56}$$

ja

$$|Rm(g(t))|_{g(t)} < C_T \quad \text{kaikilla väleillä } [0,T) \tag{3.57}$$

ovat yhtäpitäviä. Nämä huomiot edellisen lauseen kanssa osoittavat sitä vastaavan tuloksen normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisun pitkän ajan olemassaolosta.

Lause 3.9. *(Normalisoidun virtauksen ratkaisun pitkän ajan olemassaolo) Olkoon M^n kompakti Riemannin monisto. Oletetaan, että jos $g(t)$ on normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu mielivaltaisella välillä $[0,T)$, niin on olemassa vakio $C_T < \infty$ siten, että virtauksen aikana*

$$|Rm(t,x)|_{g(t)} \leq C_T < \infty, \quad x \in M^n. \tag{3.58}$$

Vakio C_T voi riippua välistä $[0,T)$. Tällöin normalisoidulla Riccin virtauksella on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu aikavälillä $[0,\infty)$.

Olemme johtaneet tarvitsemamme teorian Riccin virtauksen olemassaololle valmiiksi yleisessä ulottuvuudessa n. Lyhyesti sanottuna, jos Riemannin kaarevuustensorin normi ei divergoi minään ajan hetkenä, on ratkaisu olemassa koko ei-negatiivisella reaaliakselilla $[0,\infty)$. Siirrymme tarkastelemaan pintoja seuraavassa luvussa.

Luku 4

Riccin virtaus pinnalla

Aloitamme suljettujen Riemannin kaksi-monistojen eli pintojen kehittymisen tarkastelun Riccin virtauksessa. Tutkimme aluksi kaarevuuden aikakehitystä, jota tarvitsemme ratkaisun olemassaoloa varten. Tässä luvussa osoitamme, että pinnalla Riccin virtauksen ratkaisu on aina olemassa pitkällä aikavälillä.

Lisäksi pinnalla pätee tulos, että normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu suppenee aina vakiokaarevuudeen metriikkaan rajalla $t \to \infty$. Edellä mainitun tuloksen osoitamme seuraavassa luvussa tapauksesa, jossa pinnan Eulerin karakteristika on negatiivinen, $\chi(M) < 0$.

Aloitamme kertaamalla, miten kaarevuus yksinkertaistuu kahdessa ulottuvuudessa. Kahdessa ulottuvudessa kaarevuussuureet voidaan lausua Gaussin kaarevuuden

$$K(x) = \frac{Rm(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - < X, Y >^2}, \quad X, Y \in T_xM \tag{4.1}$$

avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= K(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) \\ R_{ij} &= Kg_{ij} \\ R &= 2K. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Kahdessa dimensiossa normalisoitu Riccin virtaus saa näitä käyttämällä muodon

$$\frac{\partial}{\partial t}g = \frac{2}{n}rg - 2Ric(g) = (r - R)g. \tag{4.3}$$

Tämän lisäksi pinnan skalaarikaarevuus kytkeytyy Gauss-Bonnetin kaavan

$$\int_M R d\mu = 4\pi\chi(M) \tag{4.4}$$

kautta sen topologiaan [Lee87, Lem 8.7]. Erityisesti $\int_M R d\mu$ on vakio. Tästa huomiosta seuraa suoraan

Propositio 4.1. *Normalisoidussa Riccin virtauksessa pinnan keskimääräinen skalaarikaarevuus r on vakio.*

Todistus. Gauss-Bonnetin kaavan nojalla keskimääräinen skalaarikaarevuuden lauseke on

$$r = \int_M R\, d\mu \bigg/ \int_M d\mu = \frac{4\pi\chi(M)}{\mathrm{Vol}(M)}, \tag{4.5}$$

missä moniston tilavuus $\mathrm{Vol}(M)$ on vakio Proposition 3.1 nojalla. □

4.1 Skalaarikaarevuuden muutosrajat

Päästäksemme käsiksi kaarevuuden muutokseen Riccin virtauksessa, johdamme seuraavaksi evoluutioyhtälön skalaarikaarevuudelle:

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta_{g(t)} R + R^2 - rR. \tag{4.6}$$

Yhtälö seuraa seuraavasta yleisemmästä tuloksesta.

Propositio 4.2. *Olkoon $g(t)$ yksiparametrinen perhe Riemannin metriikoita monistolla M, jotka noudattavat evoluutioyhtälöä*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = v_{ij}, \tag{4.7}$$

missä merkinnällä v_{ij} tarkoitetaan symmetrisen tensorin $v \in \mathcal{T}^2_0(M)$ komponentteja.

Tällöin skalarikaarevuus toteuttaa

$$\frac{\partial}{\partial t} R = -\Delta V + div(div\, v) - \langle v, Ric \rangle . \tag{4.8}$$

Yllä on merkitty $V = g^{ij} v_{ij}$ ja kulmasulkumerkinnällä tarkoitetaan yhtälössä (2.3) määriteltyä tensoreiden sisätuloa.

Todistus. Olkoon $x \in M$ ja valitaan x-keskiset normaalikoordinaatit sen ympäristöön. Käyttämällä normaalikoordinaattien ominaisuutta, $\partial_k g_{ij} = 0$ pisteessä x, laskemme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{kl} \right) (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \\ &+ \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i \frac{\partial}{\partial t} g_{lj} + \partial_j \frac{\partial}{\partial t} g_{li} - \partial_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{lj} + \nabla_j \frac{\partial}{\partial t} g_{li} - \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right), \end{aligned} \tag{4.9}$$

joka on voimassa pisteessä x. Koska yhtälön molemmat puolet ovat kuitenkin tensoreiden komponentteja ja x on mielivaltainen, pätee yhtälö koko monistolla.

Edelleen pisteessä x, jossa Christoffelin symbolit häviävät, saamme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}R^k_{kij} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\partial_k\Gamma^k_{ij} - \partial_i\Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{ka}\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ia}\Gamma^k_{kj}\right) \\ &= \partial_k\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} - \partial_i\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{kj} \\ &= \nabla_k\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} - \nabla_i\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{kj},\end{aligned} \tag{4.10}$$

joka on voimassa kaikkialla samoin perustein kuin edellä.

Edellistä yhtälöä käyttämällä skalaarikaarevuuden aikaderivaatta tulee muotoon

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R = \frac{\partial}{\partial t}(g^{ij}R_{ij}) &= g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} + \left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)R_{ij} \\ &= g^{ij}\left(\nabla_k\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} - \nabla_i\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{kj}\right) - v^{ij}R_{ij},\end{aligned} \tag{4.11}$$

sillä $\partial_t g^{ij} = -v^{ij}$ (Korollaari A.9). Sijoitetaan seuraavaksi Christoffelin symbolien aikaderivaatat (4.9) yllä olevaan, jolloin saamme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R = -\langle v, Ric\rangle + g^{ij}\Bigg[&\nabla_k\left(\frac{1}{2}g^{kl}(\nabla_i v_{lj} + \nabla_j v_{li} - \nabla_l v_{ij})\right) \\ &- \nabla_i\left(\frac{1}{2}g^{kl}(\nabla_k v_{lj} + \nabla_j v_{lk} - \nabla_l v_{kj})\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{4.12}$$

Konnektio on yhteensopiva metriikan kanssa, joten voimme viedä derivoinnin termin g^{kl} ohitse ja saamme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R = -\langle v, Ric\rangle + \frac{1}{2}g^{ij}g^{kl}(&\nabla_k\nabla_i v_{lj} + \nabla_k\nabla_j v_{li} \\ &- \nabla_k\nabla_l v_{ij} - \nabla_i\nabla_k v_{lj} - \nabla_i\nabla_j v_{lk} + \nabla_i\nabla_l v_{kj}).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Ryhmittämällä termit voimme kirjoittaa tämän muodossa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R &= -\langle v, Ric\rangle + g^{ij}g^{kl}\nabla_k\nabla_j v_{li} - g^{ij}g^{kl}\nabla_i\nabla_j v_{lk} \\ &= -\Delta V + \operatorname{div}(\operatorname{div} v) - \langle v, Ric\rangle.\end{aligned} \tag{4.14}$$

□

Proposition todistuksesta voidaan myös suoraan poimia käyttökelpoiset kaavat Christoffelin symbolien ja Riccin tensorin evoluutioille:

Huomautus 4.3. *Edellisen proposition oletusten ollessa voimassa Christoffelin symbolit Γ^k_{ij} ja Riccin tensorin komponentit R_{ij} toteuttavat evoluutioyhtälöt*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\nabla_i\frac{\partial}{\partial t}g_{lj} + \nabla_j\frac{\partial}{\partial t}g_{li} - \nabla_l\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}\right) \tag{4.15}$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} = \nabla_k\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} - \nabla_i\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{kj}. \tag{4.16}$$

Meitä kiinnostava skalaarikaarevuuden evoluutioyhtälö seuraa nyt edellisestä propositiosta.

Lause 4.4. *Olkoon M pinta. Tällöin Riccin virtauksen aikana skalaarikaarevuus toteuttaa evoluutioyhtälön*

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta_{g(t)}R + R^2 - rR. \tag{4.17}$$

Todistus. Edellisen proposition notaatiossa $v_{ij} = (r-R)g_{ij}$, joten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R &= -\Delta\left(g^{ij}(r-R)g_{ij}\right) + g^{ij}g^{kl}\nabla_k\nabla_j\left((r-R)g_{li}\right) - \langle (r-R)g, Ric\rangle \\
&= n\Delta R + g^{ij}g_{li}g^{kl}\nabla_k\nabla_j(r-R) - (r-R)R \\
&= 2\Delta R - \Delta R - (r-R)R \\
&= \Delta R + R^2 - rR.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

□

Skalaarikaarevuuden evoluutioyhtälö on epälineaarinen skalaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö, joka on kytketty metriikan g evoluutioon Laplacen operaattorin Δ_g kautta. Siten skalaarikaarevuuden evoluutioyhtälöä ei voi ratkaista itsenäisesti ratkaisematta myös metriikan evoluutioyhtälöä

$$\frac{\partial}{\partial t}g = (r-R)g. \tag{4.19}$$

Yhtälö voidaan kuitenkin nähdä koostuvan diffuusio-osasta

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta_g R \tag{4.20}$$

ja reaktio-osasta

$$\frac{\partial}{\partial t}R = R^2 - rR, \tag{4.21}$$

joista jälkimmäinen on tavallinen metriikasta riippumaton differentiaaliyhtälö skalaarikaarevuudelle. Reaktio-osasta huomataan myös, että sillä on pisteessä $R = r$ attraktiivinen tai hylkivä kiintopiste riippuen siitä onko r negatiivinen vai positiivinen.

Jos skalaarikaarevuuden evoluutioyhtälössä olisi ainoastaan diffuusio-osa, olisi odotettavissa, että ajan kuluessa R hakeutuisi pinnalla M lämpöyhtälömäisesti vakioarvoon. Se, että skalaarikaarevuus hakeutuu vakioarvoon, on linjassa tavoitteittemme kanssa. Reaktio-osa puolestaan voidaan ratkaista sijoituksella $Z = 1/R$. Reaktio-osan ratkaisu $R(t)$ pisteessä x on muotoa

$$R(t,x) = \frac{r}{1 + Cre^{rt}}, \tag{4.22}$$

missä

$$C = \frac{1}{r}\left(\frac{r}{R(0)} - 1\right). \tag{4.23}$$

Voimme päätellä, että ratkaisu hajaantuu äärellisessä ajassa, jos

$$R(0,x) > \max\{r,0\}. \tag{4.24}$$

On siis odotettavissa, että vaikeudet skalaarikaarevuuden aikakehityksen analysoinnissa johtuvat ensisijaisesti reaktio-osasta. Lisäksi reaktio-osa on vaikeammin hallittavissa, kun sen kiintopiste on hylkivä.

Aloitamme analyysin tutkimalla diffuusio-osaa, johon sovellamme monistoille yleistettyä maksimiperiaatetta. Maksimiperiaatteen yleistäminen monistoille on suoraviivaista, sillä maksimiperiaatteen väittämä on luonteeltaan lokaali.

Lemma 4.5. *(Maksimiperiaate) Jos $u \in C^2(M \times [0,T])$ ja*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u &\geq \Delta_g u \\ u(0) &\geq c \end{aligned} \tag{4.25}$$

kaikkialla, niin tällöin

$$u \geq c, \quad M \times [0,T]. \tag{4.26}$$

Todistus. Oletetaan aluksi $c = 0$ ja merkitään $u_\epsilon(t) = u(t) + \epsilon(1+t)$, jolloin

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\epsilon = \frac{\partial}{\partial t}u + \epsilon > \Delta u = \Delta u_\epsilon \tag{4.27}$$

ja

$$u_\epsilon(0) = u(0) + \epsilon > 0. \tag{4.28}$$

Osoitetaan ensin, että $u_\epsilon > 0$ joukossa $M \times [0,T]$. Tehdään vastaoletus: on olemassa $t_0 = \min\{t : u_\epsilon(t,x) = 0, \text{ jollakin } x \in M\}$. Koska $u_\epsilon(t,x) > 0$ joukossa $M \times [0,t_0)$ ja $u_\epsilon(t_0,x_0) = 0$ jollakin $x_0 \in M$, niin $u_\epsilon(t,x_0)$ on laskeva aikaparametrin t suhteen hetkellä t_0. Siten pätee

$$\frac{\partial}{\partial t}u_\epsilon(t_0,x_0) \leq 0. \tag{4.29}$$

Kysessä on myös paikan x funktion $x \mapsto u_\epsilon(t_0,x)$ minimi monistolla M: Jos olisi $\widetilde{x} \in M$ siten, että $u_\epsilon(t_0,\widetilde{x}) < 0$, niin funktion u_ϵ jatkuvuuden nojalla olisi olemassa $\widetilde{t} < t_0$ siten, että $u_\epsilon(\widetilde{t},\widetilde{x}) = 0$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa ajan t_0 minimaalisuuden kanssa. Piste (t_0,x_0) on siis funktion u_ϵ minimi.

Lokaaleissa koordinaateissa ääriarvoehto on

$$\partial_i u_\epsilon(t_0,x_0) = 0, \quad i = 1,\dots n \tag{4.30}$$

eli

$$\nabla u_\epsilon(t_0,x_0) = 0. \tag{4.31}$$

Kyseessä on lisäksi minimi, jolloin Hessen matriisi

$$H(u_\epsilon)_{ij} = \partial_i\partial_j u_\epsilon \tag{4.32}$$

on positiividefiniitti.

Huomataan seuraavaksi, että voimme lausua Laplacen operaattorin määritelmää (2.21) käyttämällä suureen Δu_ϵ seuraavasti

$$\Delta u_\epsilon = \mathrm{Tr}\left(g^{-1}H(u_\epsilon)\right) - \mathrm{Tr}\left(g^{-1}(\Gamma \cdot \nabla u_\epsilon)\right), \tag{4.33}$$

missä $(\Gamma \cdot \nabla u_\epsilon)_{ij} = \Gamma^k_{ij}(\nabla u_\epsilon)_k = \Gamma^k_{ij}\partial_k u_\epsilon$.

Pisteessä (t_0, x_0) matriisit g^{-1} ja $H(u_\epsilon)$ ovat positiividefiniittejä, joten myös niiden tulo on positiividefiniitti mainitussa pisteessä. Niinpä yhtälön (4.33) ensimmäinen termi on ei-negatiivinen pisteessä (t_0, x_0), ja tässä pisteessä jälkimmäinen termi häviää yhtälön (4.31) nojalla. Niinpä $\Delta u_\epsilon(t_0, x_0) \geq 0$, mistä seuraa ristiriita

$$0 \geq \frac{\partial}{\partial t}u_\epsilon(t_0, x_0) > \Delta u_\epsilon(t_0, x_0) \geq 0. \tag{4.34}$$

Täytyy siis olla $u_\epsilon > 0$ joukossa $M \times [0, T]$. Edelleen, koska $u = \lim_{\epsilon \to 0} u_\epsilon$, saamme

$$u \geq 0, \quad M \times [0, T]. \tag{4.35}$$

Tapaus $c \neq 0$ seuraa nyt kirjoittamalla $\widetilde{u} = u - c$, jolloin

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u} \geq \Delta \widetilde{u} \\ &\widetilde{u}(0) \geq c. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Soveltamalla aiempaan saamme

$$\widetilde{u} \geq 0 \quad \text{eli} \quad u \geq c, \quad M \times [0, T]. \tag{4.37}$$

□

Pienellä tarkastelulla huomaamme muutaman hyödyllisen seurauksen maksimiperiaatteesta. Emme jatkossa erittele maksimiperiaatetta ja sen alla esitettyjä seurauksia toisistaan, vaan kutsumme niitä yleisesti maksimiperiaatteiksi.

Korollaari 4.6. *Oletetaan* $u \in C^2(M \times [0, T])$.

1. *Oletetaan, että seuraavat epäyhtälöt ovat voimassa*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}u \leq \Delta_g u \\ &u(0) \leq c. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Tällöin pätee

$$u \leq c, \quad M \times [0, T]. \tag{4.39}$$

2. *Oletetaan yleisemmin, että*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}u \geq (\leq)\ \Delta_g u + Au \\ &u(0) \geq (\leq)\ c, \end{aligned} \tag{4.40}$$

missä A *on vakio. Tällöin pätee*

$$u \geq (\leq)\ ce^{At}, \quad M \times [0, T]. \tag{4.41}$$

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa suoraan maksimiperiaatteesta funktiolle $-u$.

Jälkimmäistä väitettä varten lasketaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-At}u\right) &= -Ae^{-At}u + e^{-At}\frac{\partial}{\partial t}u \\ &\geq (\leq)\ -Ae^{-At}u + \Delta u e^{-At} + Ae^{-At}u = \Delta\left(e^{-At}u\right).\end{aligned} \tag{4.42}$$

Maksimiperiaatteen nojalla

$$e^{-At}u \geq (\leq)\ c, \quad M \times [0,T]. \tag{4.43}$$

Eli

$$u \geq (\leq)\ ce^{At}, \quad M \times [0,T]. \tag{4.44}$$

□

Maksimiperiaatetta käyttäen saamme a priori alarajan skalaarikaarevuudelle Riccin virtauksen aikana.

Propositio 4.7. *(Skalaarikaarevuuden alaraja) Oletetaan, että $g(t)$ on normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu pinnalla. Tällöin virtauksen aikana pätee*

$$R - r \geq -Ce^{rt}, \quad C \geq 0. \tag{4.45}$$

Todistus. Olkoon $g(t)$ Riccin virtauksen ratkaisu pinnalla, jolloin skalaarikaarevuus R toteuttaa evoluutioyhtälön (4.4). Keskimääräinen skalaarikaarevuus r on vakio, joten voimme kirjoittaa

$$\frac{\partial}{\partial t}(R-r) = \Delta(R-r) + (R-r)^2 + r(R-r) \geq \Delta(R-r) + r(R-r). \tag{4.46}$$

Soveltamalla maksimiperiaatetta saamme

$$R - r \geq e^{rt}\left(R_{\min}(0) - r\right). \tag{4.47}$$

Yllä $R_{\min} = \min_{x\in M} R(x)$. Koska r on skalaarikaarevuuden R keskiarvo, pätee $R_{\min}(0) \leq r$, ja saamme

$$R - r \geq -Ce^{rt}, \quad C \geq 0. \tag{4.48}$$

□

Ylärajan löytäminen skalaarikaarevuudelle on vaikempaa. Tätä varten tulemme hyödyntämään Hamiltonin alunperin käyttämää menetelmää [Ham88]. Määritellään *potentiaali* φ, joka on Poissonin yhtälön

$$\Delta_g \varphi(x) = R(x) - r, \quad x \in M \tag{4.49}$$

ratkaisu. Yhtälö ratkaistaan erikseen jokaisella ajanhetkellä Riccin virtauksen aikana. Ratkaisun olemassaolo ja vakiota vaille yksikäsitteisyys on osoitettu liitteen Lauseessa A.11. Yksikäsitteisen ratkaisun saamme kiinnittämällä vakion ehdolla

$$\int_M \varphi d\mu = 0 \tag{4.50}$$

kullakin ajan hetkellä.

Jatkamme skalaarikaarevuuden R aikakehityksen tutkimista potentiaalin φ avulla. Seuraava lemma tarkastelee sen aikakehitystä Riccin virtauksen aikana.

Lemma 4.8. *Riccin virtauksen aikana φ kehittyy yhtälön*

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \Delta\varphi + r\varphi - b(t) \tag{4.51}$$

mukaisesti, missä

$$b(t) = \int_M \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle \, d\mu / \mathit{Vol}(M) \geq 0. \tag{4.52}$$

Todistus. Todistus on suoraviivainen lasku, jossa käytämme liitteen Proposition A.8 identiteettejä

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = (R - r) g^{ij} \tag{4.53}$$

ja

$$g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = 0. \tag{4.54}$$

Identiteetit ovat voimassa pinnan Riccin virtauksen aikana.

Lausumalla skalaarikaarevuuden muutos potentiaalin φ avulla voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R = \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi &= \frac{\partial}{\partial t} \left(g^{ij} \left(\partial_i \partial_j \varphi - \Gamma_{ij}^k \partial_k \varphi \right) \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) \left(\partial_i \partial_j \varphi - \Gamma_{ij}^k \partial_k \varphi \right) + g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left(\partial_i \partial_j \varphi - \Gamma_{ij}^k \partial_k \varphi \right) \\
&= (R - r) g^{ij} \left(\partial_i \partial_j \varphi - \Gamma_{ij}^k \partial_k \varphi \right) + g^{ij} \left(\partial_i \partial_j \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \Gamma_{ij}^k \partial_k \frac{\partial}{\partial t} \varphi \right) \\
&= (R - r) \Delta\varphi + \Delta \frac{\partial}{\partial t} \varphi,
\end{aligned} \tag{4.55}$$

missä käytimme identiteettejä (4.53) ja (4.54) viimeistä edeltävässä vaiheessa.

Edelleen saamme

$$\begin{aligned}
\Delta \frac{\partial}{\partial t} \varphi &= \frac{\partial}{\partial t} R - (R - r) \Delta\varphi \\
&= \Delta R + R^2 - rR - (R - r) \Delta\varphi \\
&= \Delta \left(\Delta\varphi \right) + r \Delta\varphi = \Delta \left(\Delta\varphi + r\varphi \right).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Funktio $\frac{\partial}{\partial t}\varphi - \Delta\varphi - r\varphi$ on siten harmoninen. Koska M on lisäksi suljettu, harmoninen funktio on välttämättä vakio (Korollaari A.12). Saimme siis

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \Delta\varphi + r\varphi - b(t). \tag{4.57}$$

Normeeraus $\int_M \varphi d\mu = 0$ kiinnittää vakion $b(t)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\int_M \varphi d\mu = \int_M \frac{\partial}{\partial t}\varphi d\mu + \int_M \varphi \frac{\partial}{\partial t}\mu dx \\ &= \int_M \Delta\varphi d\mu + \int_M r\varphi d\mu - b(t)\int_M d\mu + \int_M \varphi(r-R)d\mu, \end{aligned} \tag{4.58}$$

sillä $\frac{\partial}{\partial t}d\mu = (r-R)d\mu$. Osa termeistä häviää normeerausehdon $\int_M \varphi d\mu = 0$ nojalla, ja soveltamalla divergenssilausetta kahteen otteeseen, yllä oleva saa muodon

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial M} \langle \overline{N}, \nabla\varphi \rangle \, d\widetilde{\mu} - b(t)\int_M d\mu - \int_M \varphi\Delta\varphi d\mu \\ &= -b(t)\mathrm{Vol}(M) + \int_M \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle \, d\mu. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ratkaisemalla tämän saamme

$$b(t) = \int_M \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle \, d\mu \,/\mathrm{Vol}(M) \geq 0 \, . \tag{4.60}$$

□

Määritellään seuraavaksi uusi apufunktio h kaavalla

$$h = \Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2 = R - r + |\nabla\varphi|^2 \tag{4.61}$$

ja tarkastellaan sen aikakehitystä. Tavoitteemme on löytää sille yläraja virtauksen aikana, jolloin saamme rajoitettua myös suuretta $R - r$:

$$R - r \leq h \leq \max_t h(t). \tag{4.62}$$

Lemma 4.9. *Pinnan Riccin virtauksen aikana pätee*

$$\frac{\partial}{\partial t}h = \Delta h - 2\,|M|^2 + rh, \tag{4.63}$$

missä on merkitty

$$M = \nabla^2\varphi - \frac{1}{2}\,(\Delta\varphi)\,g \in \mathcal{T}_0^2(M). \tag{4.64}$$

Todistus. Funktion h termin $R - r$ aikaderivaatta saadaan edellisen lemman todistuksesta:

$$\frac{\partial}{\partial t}(R - r) = \Delta(R - r) + (\Delta\varphi)^2 + r(R - r). \tag{4.65}$$

Termin $|\nabla\varphi|^2$ aikaderivaatan laskemisessa hyödynnämme Korollaarin A.6 ja Proposition A.7 antamia identiteettejä

$$\begin{aligned} [\nabla_i, \Delta] &= -\frac{1}{2}R\nabla_i \\ \Delta\,|\nabla\varphi|^2 &= 2g^{ij}\Delta\,(\nabla_i\varphi)\,\nabla_j\varphi + 2\left|\nabla^2\varphi\right|^2. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Näitä käyttämällä saamme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\varphi|^2 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)(\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi) + 2g^{ij}\nabla_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right)\nabla_j\varphi \\
&= (R-r)|\nabla\varphi|^2 + 2g^{ij}\nabla_i(\Delta\varphi + r\varphi - b(t))\nabla_j\varphi \\
&= (R-r)|\nabla\varphi|^2 + 2g^{ij}\nabla_i(\Delta\varphi)\nabla_j\varphi + 2rg^{ij}\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi \\
&= (R+r)|\nabla\varphi|^2 + 2g^{ij}\left(\Delta\nabla_i\varphi - \frac{1}{2}R\nabla_i\varphi\right)\nabla_j\varphi \\
&= r|\nabla\varphi|^2 + \Delta\left(|\nabla\varphi|^2\right) - 2\left|\nabla^2\varphi\right|^2.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Yhdistämällä derivaattojen lausekkeet saamme funktion h derivaatan. Tulos on

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}h &= \Delta(R-r) + \Delta\left(|\nabla\varphi|^2\right) + r\left(R - r + |\nabla\varphi|^2\right) + (\Delta\varphi)^2 - 2\left|\nabla^2\varphi\right|^2 \\
&= \Delta h + rh - 2|M|^2,
\end{aligned} \tag{4.68}$$

missä olemme huomanneet, että

$$\begin{aligned}
|M|^2 &=< M, M >= \left|\nabla^2\varphi\right|^2 - \Delta\varphi\left\langle\nabla^2\varphi, g\right\rangle + \frac{1}{4}(\Delta\varphi)^2 < g, g > \\
&= \left|\nabla^2\varphi\right|^2 - \Delta\varphi\ g^{ik}g^{jl}\nabla_i\nabla_j\varphi\ g_{kl} + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2 = \left|\nabla^2\varphi\right|^2 - \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

□

Edellisen nojalla voimme arvioda

$$\frac{\partial}{\partial t}h \leq \Delta h + rh, \tag{4.70}$$

jolloin maksimiperiaatteesta seuraa

$$h(t) \leq e^{rt}h_{\max}(0). \tag{4.71}$$

Apufunktion h alkuhetkelle on voimassa

$$h_{\max}(0) = R_{\max}(0) - r + |\nabla\varphi|^2_{\max}(0) \geq 0 \tag{4.72}$$

ja lisäksi pätee

$$h \geq R - r. \tag{4.73}$$

Ottamalla aiemmin johtamamme alarajan suureelle $R - r$ huomioon, olemme siten osoittaneet seuraavan tuloksen:

Lause 4.10. *(Skalaarikaarevuuden muutosrajat) Olkoon $g(t)$ pinnan normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu. Tällöin skalaarikaarevuudelle R on voimassa moniston pisteestä x riippumattomat muutosrajat*

$$-Ce^{rt} \leq R - r \leq Ce^{rt}, \quad C > 0 \tag{4.74}$$

virtauksen aikana.

4.2 Ratkaisun olemassaolo pinnalla

Olemme lähellä tavoitettamme, joka oli kaarevuuden Rm muutoksen arvioiminen Riccin virtauksen kuluessa. Jos kaarevuuden normi säilyy rajoitettuna virtauksen aikana, tiedämme Lauseen 3.9 nojalla, että Riccin virtauksella on pitkän ajan ratkaisu. Seuraava lemma antaa lopulta arvion $|Rm(t)|_{g(t)} \leq C_T$, kun $t \in [0, T)$.

Lemma 4.11. *Olkoon $g(t)$ Riccin virtauksen ratkaisu pinnalla välillä $[0, T)$. Tällöin*

$$|Rm(t)|_{g(t)} \leq C < \infty, \quad t \in [0, T). \tag{4.75}$$

Todistus. Edellisen lauseen nojalla pätee

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}^2 = 2(r - R) g_{ij}^2 \leq 2Ce^{rt} g_{ij}^2 \leq C' g_{ij}^2, \tag{4.76}$$

joten Grönwallin epäyhtälö antaa

$$g_{ij}^2(t) \leq g_{ij}^2(0) e^{2C't}. \tag{4.77}$$

Metriikan komponentit ovat siis rajoitettuja välillä $[0, T)$, jolloin myös sen käänteismetriikan komponentit ovat rajoitettuja tällä välillä.

Pinnoilla on voimassa

$$\begin{aligned} R &= 2K \\ R_{ijkl} &= K(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}). \end{aligned} \tag{4.78}$$

Koska skalaarikaarevuuden muutosrajojen (4.74) nojalla skalaarikaarevuus R on rajoitettu mainitulla välillä, ovat kaarevuuden Rm komponentit myös rajoitettuja. Niinpä kaarevuuden normille pätee

$$|Rm|_g^2 = g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g^{i_3 j_3} g^{i_4 j_4} R_{i_1 i_2 i_3 i_4} R_{j_1 j_2 j_3 j_4}, \tag{4.79}$$

ja se on siten rajoitettu välillä $[0, T)$. □

Pinnan Riccin virtauksen pitkän ajan ratkaisun olemassaolo seuraa nyt edellisestä ja Lauseesta 3.9

Lause 4.12. *Pinnan Riccin virtauksella*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g &= (r - R) g \\ g(0) &= g_0 \end{aligned} \tag{4.80}$$

on yksikäsitteinen sileä ratkaisu välillä $[0, \infty)$ mille tahansa alkuhetken metriikalle g_0.

Saamamme tulos antaa meille valmiudet tutkia pinnan Riccin virtauksen käyttäytymistä rajalla $t \to \infty$. Tämä on seuraavan luvun aihe.

Luku 5

Pinnan Riccin virtauksen asymptoottinen käyttäytyminen

Edellisessä luvussa osoitimme, että pinnalla Riccin virtauksella on aina ratkaisu koko ei-negatiivisella reaaliakselilla $[0, \infty)$. Nyt tutkimme ratkaisun käyttäytymistä rajalla $t \to \infty$. Muistamme skalaarikaarevuuden evoluutioyhtälön (4.17) tulkinnan diffuusio- ja reaktio-osan summana. Voimme epäillä, että ajan kuluessa diffuusio-osasta tulee dominoiva osa. Muuten evoluutioyhtälön reaktio-osan pitäisi ainakin yleisessä tapauksessa aiheuttaa ratkaisun hajaantuminen äärellisessä ajassa. Toisaalta diffuusiolle on ominaista vakioarvoon hakeutuminen, joten oletamme skalaarikaarevuuden päätyvän lopulta vakioksi.

Näin tuleekin käymään. Ei-negatiivisen ja varsinkin postiivisen Eulerin karateristikan tapauksessa tämän tuloksen osoittaminen on huomattavan paljon työläämpää kuin negatiivisessa tapauksessa. Pinnallisin puolin tämä johtuu viime luvussa johdetusta skalaarikaarevuuden muutosrajojen

$$|R - r| \leq Ce^{rt} \tag{5.1}$$

luonteesta. Epäyhtälön oikea puoli lähestyy nollaa ajan kuluessa ainoastaan, jos keskimääräinen skalaarikaarevuus r on negatiivinen. Toisaalta Gauss-Bonnetin kaavan nojalla keskimääräisen skalaarikaarevuus on negatiivinen täsmälleen silloin kuin pinnan Eulerin karakteristika on negatiivinen.

Hieman syvällisemmän näkymyksen antaa jo mainittu skalaarikaarevuuden evoluutioyhtälön reaktio-osan kiintopisteiden tyyppi: jos r on negatiivinen, kiintopiste on attraktiivinen, ja hylkivä, jos r on positiivinen. Tavoitteemme tässä luvussa on osoittaa seuraava lause ([CK04, Thm 5.1]) erikoistapauksessa $\chi(M) < 0$.

Lause 5.1. *Olkoon (M, g_0) pinta. Tällöin alkuhetken metriikasta g_0 alkavan normalisoidun Riccin virtauksen yksikäsitteinen ratkaisu suppenee sileään vakiokaarevuuden metriikkaan g_∞ kaikissa C^k-normeissa, kun $t \to \infty$.*

Lause ja sen todistus yleiselle pinnalle löytyy esimerkiksi kirjasta [CK04]. Kun $\chi(M) < 0$, lauseen todistus on olennaisesti raja-arvometriikan $g_\infty :=$

$\lim_{t\to\infty} g(t)$ olemassaolo- ja sileystulos. Jos nimittäin raja-arvo on sileä Riemannin metriikka, niin yhtälöstä (5.1) nähdään skalaarikaarevuuden $(R \circ g)(t)$ jatkuvuuden nojalla, että

$$\lim_{t\to\infty} R(g(t)) = R(g_\infty) = r. \tag{5.2}$$

Osoitetaan aluksi, että raja-arvo g_∞ on jatkuva Riemannin metriikka.

Lemma 5.2. *Olkoon (M, g_0) pinta, jonka Eulerin karakteristika on negatiivinen. Tällöin normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisulle $g(t)$ pätee*

$$g(t) \longrightarrow g_\infty, \quad \text{kun} \ \ t \to \infty. \tag{5.3}$$

Lisäksi suppeneminen on tasaista, joten g_∞ on jatkuva Riemannin metriikka pinnalla M.

Todistus. Olkoon $x \in M$ ja $U \in T_xM$. Nyt saamme

$$\frac{d}{dt}|U|^2_{g(t,x)} = \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t,x)\right) U^i U^j = (r - R)|U|^2_{g(t,x)} \leq Ce^{rt}|U|^2_{g(t,x)}. \tag{5.4}$$

Koska x oli mielivaltainen, pätee epäyhtälö koko pinnalla M. Jakamalla epäyhtälö puolittain vektorin U pituuden neliöllä $|U|^2_{g(t)}$ huomaamme, että pätee

$$\left\| \frac{d}{dt}\left(\ln |U|^2_{g(t)}\right)\right\|_{L^\infty(M)} \leq Ce^{rt}, \quad t > 0. \tag{5.5}$$

Eulerin karateristika on oletuksen nojalla negatiivinen, joten myös keskimääräinen skalaarikaarevuus on negatiivinen. Niinpä vektorin U normille pätee

$$\lim_{t\to\infty} |U|_{g(t)} = |U|_{g_\infty}, \quad C(M). \tag{5.6}$$

Rajafunktio $|U|_{g_\infty}$ on siis olemassa ja jatkuva. Edelleen suunnikassäännöstä seuraa (vertaa yhtälö (3.32))

$$g(t)(U,V) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} g_\infty(U,V), \quad C(M) \tag{5.7}$$

kaikilla $U, V \in T_xM$. Siten metriikoiden $g(t)$ komponentit suppenevat tasaisesti. Lisäksi g_∞ on bilineaarinen ja symmetrinen.

Soveltamalla epäyhtälöä (5.4) uudelleen saamme

$$\begin{aligned} \left|\ln \frac{|U|^2_{g(t)}}{|U|^2_{g(0)}}\right| &= \left|\int_0^t \frac{d}{ds} \ln |U|^2_{g(s)} ds\right| \leq C \int_0^t e^{rs} ds \\ &= \frac{C}{r}(e^{rt} - 1), \end{aligned} \tag{5.8}$$

josta edelleen eksponentioimalla ja ottamalla raja-arvo $t \to \infty$ seuraa

$$e^{C/r}|U|^2_{g(0)} \leq |U|^2_{g_\infty} \leq e^{-C/r}|U|^2_{g(0)}. \tag{5.9}$$

Niinpä g_∞ on positiividefiniitti ja rajoitettu. Olemme osoittaneet, että g_∞ on jatkuva Riemannin metriikka. $\square$

Seuraava vaihe on osoittaa rajametriikan sileys. Tätä varten tehdään keskeinen huomio: normalisoitu Riccin virtaus kahdessa ulottuvuudessa on alkuhetken metriikan ajasta riippuva konforminen muunnos. Jos nimittäin $g(t)$ on normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu välillä $[0,\infty)$ monistolla (M, g_0), niin skalaarikaarevuus on tällöin sileä ajan t funktio ja ratkaisun yksikäsitteisyyden nojalla voidaan kirjoittaa

$$g(t) = g_0 \exp \int_0^t (r - R)(s) ds. \tag{5.10}$$

Sanotaan jatkossa, että

$$g(t) = e^{v(t)} g_0 \tag{5.11}$$

on ratkaisun konformiesitys, missä *konformitekijä* v on määritelty kaavalla

$$v(t, x) = \int_0^t (r - R)(s) ds. \tag{5.12}$$

Huomataan lisäksi, että pätee

$$\frac{\partial}{\partial t} v = (r - R). \tag{5.13}$$

Edellisen lemman nojalla raja-arvo g_∞ on olemassa ja jatkuva, joten on olemassa myös jatkuva raja-arvo

$$\lim_{t\to\infty} v(t) =: v_\infty. \tag{5.14}$$

Erityisesti metriikan g_∞ ja funktion v_∞ sileys moniston M suhteen ovat ekvivalentteja. Jatkossa pyrimmekin osoittamaan funktion v_∞ sileäksi.

Idea on seuraava: Osoitetaan, että skalaarikaarevuuden $g(t)$-kovariantit derivaatat häviävät tasaisesti rajalla $t \to \infty$:

$$\left|\nabla^k R\right|_{g(t)} \le f(t) \tag{5.15}$$

kaikilla $k \ge 1$, missä

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0. \tag{5.16}$$

Käyttäen yhtälöä (5.13) haluaisimme kirjoittaa

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}^k v\right|_{\overline{g}} \sim \left|\nabla^k \frac{\partial}{\partial t} v\right|_{g(t)} = \left|\nabla^k R\right|_{g(t)} \le f(t), \tag{5.17}$$

jolloin konformitekijän v kovariantit derivaatat suppenisivat vakioon rajalla $t \to \infty$. Yllä (ja jatkossa) $\overline{\nabla}$ on metriikan g_0 suhteen muodostettu kovariantti derivaatta. Operaattori $\overline{\nabla}$ kommutoi operaattorin $\frac{\partial}{\partial t}$ kanssa toisin kuin metriikan $g(t)$ suhteen muodostettu operaattori ∇. Konformitekijän raja-arvon v_∞ sileyden osoittaminen redusoituu siis kahteen vaiheeseen - skalaarikaarevuuden kovarianttien derivaattojen arvioimiseen ja arvion (5.17) todentamiseen.

5.1 Normien ekvivalenssi

Aloitamme laskemalla miten (yleinen) metriikan konforminen muunnos muuttaa konnektiota.

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k(g) &= \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)\\ &= \frac{1}{2}e^{-v}g_0^{kl}e^v\left(\partial_i g_{0jl} + g_{0jl}\partial_i v + \partial_j g_{0il} + g_{0il}\partial_j v - \partial_l g_{0ij} - g_{0ij}\partial_l v\right)\\ &= \overline{\Gamma}_{ij}^k + S_{ij}^k,\end{aligned} \tag{5.18}$$

missä määrittelimme

$$\begin{aligned}S_{ij}^k :&= \frac{1}{2}g_0^{kl}\left(g_{0jl}\partial_i v + g_{0il}\partial_j v - g_{0ij}\partial_l v\right)\\ &= \frac{1}{2}g_0^{kl}\left(g_{0jl}\overline{\nabla}_i v + g_{0il}\overline{\nabla}_j v - g_{0ij}\overline{\nabla}_l v\right).\end{aligned} \tag{5.19}$$

ja

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k := \Gamma_{ij}^k(g_0). \tag{5.20}$$

Tensorin $F \in \mathcal{T}_l^k(M)$ kovariantin derivaatan komponentit voidaan siten kirjoittaa muodossa

$$\nabla_m F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l} = \overline{\nabla}_m F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l} + \sum_{s=1}^{l} S_{ma}^{j_s} F_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots a\cdots j_l} - \sum_{s=1}^{k} S_{mi_s}^{a} F_{i_1\cdots a\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}, \tag{5.21}$$

joka määrittelee myös koordinaattivapaan merkinnän

$$\nabla F = \overline{\nabla} F + SF \tag{5.22}$$

ilmeisellä tavalla.

Seuraava lemma antaa formaalin yhteyden keskenään konformisten metriikoiden kovarianttien derivaattojen välille.

Lemma 5.3. *Olkoon $u \in C^\infty(M)$. Tällöin pätee*

$$\nabla^k u = \overline{\nabla}^k u + T^k, \tag{5.23}$$

missä $T^k \in \mathcal{T}_0^k(M)$ on tensori, jonka komponentit on muodostettu tensoreiden $\overline{\nabla} v, \ldots, \overline{\nabla}^{k-1} v$ ja $\overline{\nabla} u, \ldots, \overline{\nabla}^{k-1} u$ komponenttien tulojen lineaariyhdisteistä. Lisäksi jokaisessa lineaariyhdisteen termissä on vähintään yksi tensorin $\overline{\nabla}^l u$ komponentti, $l < k$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Tapaus $l = 1$ on triviaalisti voimassa, sillä

$$\nabla_i u = \partial_i u = \overline{\nabla}_i u. \tag{5.24}$$

Oletetaan sitten, että väite on voimassa, kun $l \leq k$, ja osoitetaan, että tällöin väite pätee myös tapauksessa $l = k + 1$:

$$\begin{aligned}\nabla^{k+1} u &= \nabla \overline{\nabla}^k u + \nabla T^k\\ &= \overline{\nabla}^{k+1} u + S\overline{\nabla}^k u + \overline{\nabla} T^k + ST^k.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Kuvaus S muodostuu tensorin ∇v komponenttien lineaariyhdisteistä, joten oikean puolen kolme viimeistä termiä ovat vaadittua muotoa induktio-oletuksen ja Leibnizin säännön nojalla. $\square$

Voimme nyt osoittaa, että tensorin $\nabla^k R$ häviäminen $g(t)$-normissa rajalla $t \to \infty$ johtaa tensorin $\overline{\nabla}^k R$ häviämiseen samalla rajalla.

Lemma 5.4. *Olkoon $g(t)$ Riccin virtaus pinnalla (M^2, g_0) ja oletetaan, että*

$$\left|\nabla^k R\right|_{g(t)} \leq f_k(t), \qquad \lim_{t\to\infty} f_k(t) = 0 \tag{5.26}$$

kaikille $k \geq 1$. Tällöin alkuhetken metriikasta g_0 muodostetulle konnektiolle $\overline{\nabla}$ ja normille $|\cdot|_{g_0}$ pätee vastaava estimaatti:

$$\left|\overline{\nabla}^k R\right|_{g_0} \leq \widetilde{f}_k(t), \qquad \lim_{t\to\infty} \widetilde{f}_k(t) = 0 \tag{5.27}$$

kaikille $k \geq 1$.

Erityisesti pätee

$$\lim_{t\to\infty} \overline{\nabla}^k R(t) = 0. \tag{5.28}$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla derivionnin asteen l suhteen. Huomataan aluksi, että tensorille $F \in \mathcal{T}_l^k(M)$ pätee

$$|F|_{\overline{g}} = e^{(k-l)v}|F|_g. \tag{5.29}$$

Toisaalta funktio v on tasaisesti rajoitettu virtauksen aikana:

$$|v(t)| = \left|\int_0^t (r - R(s))ds\right| \leq C\int_0^\infty e^{rs}ds = -\frac{C}{r}. \tag{5.30}$$

Siten metriikoiden $g(t)$ ja g_0 suhteen muodostetut tensorinormit ovat ekvivalentteja keskenään. Niinpä tapaus $l = 1$ seuraa huomiosta

$$\nabla R = \overline{\nabla} R. \tag{5.31}$$

Edellisen lemman nojalla tensorien $\overline{\nabla}^{k+1} R$ ja $\nabla^{k+1} R$ komponentit eroavat toisistaan vain termeillä, jotka ovat lineaariyhdisteitä funktion v ja skalaarikaarevuuden R korkeintaan astetta k olevien g_0-kovarianttien derivaatojen komponenttien tuloista. Lisäksi jokaisessa lineaariyhdisteen jäsenessä on vähintään yksi termi muotoa $\overline{\nabla}^l R$ jollakin $l < k+1$. Tensoreiden $\overline{\nabla}^l R$, $l < k+1$, komponentit ovat lisäksi induktio-oletuksen nojalla rajoitettuja rajalla $t \to \infty$ häviävällä funktiolla. Induktioaskelta varten riittää siis osoittaa tensoreiden $\overline{\nabla}^l v$ rajoittuneisuus, kun $l < k+1$.

Kun $l < k+1$, pätee

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}^l v(t)\right|_{g_0} = \left|\overline{\nabla}^l \frac{\partial}{\partial t} v(t)\right|_{g_0} = \left|\overline{\nabla}^l R\right|_{g_0} \leq \widetilde{f}_l(t). \tag{5.32}$$

Niinpä funktion v g_0-kovariantit derivaatat suppenevat vakioarvoon rajalla $t \to \infty$. Tästä seuraa, että tensorit $\overline{\nabla}^l v$, $l < k+1$, ovat rajoitettuja virtauksen aikana. $\square$

Saamiamme tuloksia käyttäen osoittamme, että edellisen lemman oletukset ovat riittävä ehto funktion v_∞ sileydelle.

Lemma 5.5. *Olkoon $g(t)$ normalisoidun Riccin virtauksen pitkän ajan ratkaisu monistolla (M, g_0). Oletetaan, että kaikilla $k \geq 1$*

$$\left|\nabla^k R\right|_{g(t)} \leq f_k(t), \qquad \lim_{t\to\infty} f_k(t) = 0. \tag{5.33}$$

Tällöin ratkaisun konformiesityksen

$$g(t) = e^{v(t)} g_0 \tag{5.34}$$

konformitekijällä v on moniston M suhteen sileä raja-arvo

$$v_\infty := \lim_{t\to\infty} v(t). \tag{5.35}$$

Todistus. Olkoon $k \geq 1$. Korollaarin 5.4 nojalla

$$\left|\overline{\nabla}^k R\right|_{g_0} \longrightarrow 0, \quad \text{kun } t \to \infty \tag{5.36}$$

jonka vuoksi

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}^k v(t)\right|_{g_0} = \left|\overline{\nabla}^k \frac{\partial}{\partial t} v(t)\right|_{g_0} = \left|\overline{\nabla}^k R\right|_{g_0} \longrightarrow 0, \quad \text{kun } t \to \infty. \tag{5.37}$$

Koska suppeneminen on lisäksi tasaista, $v(t)$ suppenee tasaisesti funktioon v_∞ jokaisessa C^k-normissa, kun $t \to \infty$. Siten v_∞ on sileä moniston M suhteen. $\square$

5.2 Skalaarikaarevuuden derivaattojen arviointi

Skalaarikaarevuuden kovarianttien derivaattojen normin häviäminen ajan kuluessa johtaa edellisten tulosten nojalla konformitekijän v_∞ sileyteen. Pinnalla onkin voimassa seuraava tulos.

Propositio 5.6. *Olkoon $g(t)$ normalisoidun Riccin virtauksen pitkän ajan ratkaisu monistolla (M, g_0) ja oletetaan, että $\chi(M) < 0$. Tällöin pätee*

$$\left|\nabla^k R\right|_{g(t)} \leq C_k e^{rt/2}, \quad C_k < \infty \tag{5.38}$$

kaikilla $k \geq 1$, $t \geq 0$.

Yleisen derivoinnin asteen k tapauksen osoittaminen on laskuteknisesti työlästä. Toisaalta tapaus $k = 1$ sisältää yleisenkin tapauksen todistuksen pääideat. Näiden seikkojen vuoksi tyydymme tapauksen $k = 1$ todistamiseen. Yleinen tapaus todistuksineen löytyy kirjasta [CK04, s. 122].

Lemma 5.7. *Normalisoidun Riccin virtauksen aikana pinnalla $(M, g(t))$, kovariantin derivaatan normin neliö $|\nabla R|^2$ muuttuu seuraavasti*

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla R|^2 = \Delta|\nabla R|^2 - 2|\nabla^2 R|^2 + (4R - 3r)|\nabla R|^2. \tag{5.39}$$

Todistus. Käyttämällä liitteen Korollaarin A.6 (Ricci-) identiteettiä

$$\nabla\Delta = \Delta\nabla - \frac{1}{2}R\nabla \tag{5.40}$$

ja skalaarikaarevuuden evoluutioyhtälöä (4.17) saamme

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla R = \nabla\left(\Delta R + R(R-r)\right) = \Delta\nabla R + \frac{3}{2}R\nabla R - r\nabla R. \tag{5.41}$$

Niinpä pätee

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|\nabla R|^2 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}\nabla_i R\nabla_j R\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)\nabla_i R\nabla_j R + 2g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla_i R\right)\nabla_j R \\ &= (R-r)|\nabla R|^2 + 2\left\langle \Delta\nabla R + \frac{3}{2}R\nabla R - r\nabla R, \nabla R\right\rangle. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Liitteen Proposition A.7 nojalla on voimassa identiteetti

$$\Delta|\nabla R|^2 = 2\left\langle \Delta\nabla R, \nabla R\right\rangle + 2\left|\nabla^2 R\right|^2, \tag{5.43}$$

jota käyttämällä voimme sieventää yhtälön (5.42) haluttuun muotoon:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|\nabla R|^2 &= (R-r)\left|\nabla R\right|^2 + \Delta|\nabla R|^2 - 2|\nabla^2 R|^2 + 3R|\nabla R|^2 - 2r|\nabla R|^2 \\ &= \Delta|\nabla R|^2 - 2|\nabla^2 R|^2 + (4R-3r)|\nabla R|^2. \end{aligned} \tag{5.44}$$

□

Korollaari 5.8. *Jos $(M, g(t))$ on normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu ja $\chi(M) < 0$, niin on olemassa vakio $C_1 < \infty$ siten, että seuraava arvio on voimassa*

$$|\nabla R|^2 \leq C_1 e^{rt/2}, \quad t \geq 0 \tag{5.45}$$

Todistus. Edellisen lemman ja epäyhtälön

$$|r - R| \leq Ce^{rt} \tag{5.46}$$

nojalla pätee

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla R|^2 \leq \Delta|\nabla R|^2 - 2|\nabla^2 R|^2 + (r + 4Ce^{rt})|\nabla R|^2. \tag{5.47}$$

Ajan t ollessa rittävän suuri ($t \geq 1/r\ln(-r/8C)$) voimme arvioida yllä olevaa edelleen seuraavasti

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla R|^2 \leq \Delta|\nabla R|^2 + \frac{r}{2}|\nabla R|^2. \tag{5.48}$$

Väittämä seuraa nyt maksimiperiaatteesta sovellettuna funktioon $|\nabla R|^2$. □

Tässä luvussa olemme tarkastelleet normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisun käyttäytymistä rajalla $t \to \infty$ tapauksessa $\chi(M) < 0$. Huomasimme, että ratkaisun voi esittää konformimuunnoksen avulla muodossa

$$g(t) = e^{v(t)} g_0, \tag{5.49}$$

missä konformitekijä v suppenee sileään funktioon v_∞, kun $t \to \infty$. Siten raja-arvo $\lim_{t\to\infty} g(t)$ on sileä Riemannin metriikka. Koska skalaarikaarevuus on jatkuva ajan t suhteen saamme

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = R(g_\infty). \tag{5.50}$$

Skalaarikaarevuuden kasvurajoista

$$|r - R| \leq Ce^{rt} \tag{5.51}$$

seuraa, että

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = r. \tag{5.52}$$

Toisin sanoen, normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu suppenee rajalla $t \to \infty$ sileään vakiokaarevuuden Riemannin metriikkaan g_∞

$$R(g_\infty) = r. \tag{5.53}$$

Olemme todistaneet Lauseen 5.1 tapauksessa $\chi(M) < 0$.

Luvun päätteeksi muotoilemme kaksi seurausta Lauseesta 5.1 ja saamistamme tuloksista.

Korollaari 5.9. *Olkoon (M, g_0) pinta. Tällöin g_0 on konforminen vakiokaarevuuden metriikan kanssa.*

Todistus. Riccin virtauksessa alkuhetken metriikka g_0 on konforminen metriikan g_∞ kanssa, joka on vakiokaarevuuden metriikka. □

Pinnan sanotaan olevan hyperbolinen, euklidinen tai elliptinen, jos sen Gaussin kaarevuus (4.1) on negatiivinen, nolla tai positiivinen koko pinnalla. Tätä terminologiaa käyttäen muotoilemme seuraavan:

Korollaari 5.10. *Olkoon (M, g_0) pinta. Riippuen onko pinnan Eulerin karakteristika negatiivinen, nolla vai positiivinen, Riccin virtaus hyperbolisoi, euklidisoi tai elliptisoi pinnan.*

Todistus. Pinnalla on voimassa

$$K = \frac{R}{2}. \tag{5.54}$$

□

Luku 6

Yhteenveto

Työn alkupuolella tarkastelimme Riccin virtausta yleisessä dimensiossa ja johdimme tarpeisiimme sopivan olemassaoloteorian Riccin virtaukselle käyttämällä joitain yleisiä Riccin virtauksen teorian tuloksia. Jos Riemannin kaarevuustensorin normi ei hajaannu äärellisessä ajassa, virtauksella on aina pitkän ajan ratkaisu. Ehto on minimaalinen siinä mielessä, että Riccin virtausyhtälössä metriikan aikaderivaatta on verrannollinen Riccin kaarevuuteen.

Yleisen teorian jälkeen siirryimme tarkastelemaan suljettuja kaksi-monistoja eli pintoja. Pinnoilla Gauss-Bonnetin lause kytkee skalaarikaarevuuden pinnan topologiaan ja toisaalta kaarevuus itsessään yksinkertaistuu kahdessa ulottuvuudessa. Näiden yksinkertaistavien huomioiden avulla pystyimme osoittamaan, että skalaarikaarevuus pinnalla pysyy rajoitettuna virtauksen aikana. Edelleen pinnalla Riccin virtauksella on aina pitkän ajan ratkaisu.

Loppuosan työstä käytimme pinnan Riccin virtauksen ratkaisun asymptoottiseen analyysin, jota helpotti havainto siitä, että pinnoilla Riccin virtauksen ratkaisu voidaan esittää alkuhetken metriikan ajasta riippuvana konformisena muunnoksena. Rajalla $t \to \infty$ normalisoidun Riccin virtauksen ratkaisu suppenee vakiokaarevuuden metriikkaan, minkä osoitimme negatiivisen Eulerin karakteristikan pinnalle. Tulos antaa Riccin virtaukselle tulkinnan pintoja tasoittavana prosessina.

Tapaukset, jossa Eulerin karakteristika on nolla tai positiivinen ovat vaikeampia todistaa. Tämän vaikeuden voi kvalitatiivisesti nähdä johtuvan suppenemispisteen eli virtauksen kiintopisteen tyypistä, joka positiivisessa tapauksessa on hylkivä. Kun keskimääräinen skalaarikaarevuus häviää, asymptoottisen suppenemisen voi osoittaa samankaltaisilla argumenteilla, joita käytimme negatiivisen tapauksen osoittamiseen. Positiivisen tapauksen osoittamista varten tarvitaan kuitenkin uusi lähestymistapa. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriasta tuttu Harnackin arvio ja pintaentropia

$$N(g) := \int_M R \ln R d\mu \tag{6.1}$$

osoittautuvat tässä tehtävässä hyödylliseksi [CK04].

Vaikka työ on pääsääntöisesti käsitellyt pintoja, useat saamamme tulokset ovat toimivia työkaluja myös korkeammissa ulottuvuuksissa. Voimme esimerkiksi maksimiperiaatetta käyttämällä suoraan todistaa, että positiivinen skalaarikaarevuus säilyy positiivisena Riccin virtauksessa. Käyttämällä Bianchin identiteettiä

$$\operatorname{div} Ric = \frac{1}{2}\nabla R \tag{6.2}$$

Proposition 4.2 tulokseen huomaamme, että yleisesti Riccin virtauksen aikana pätee

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R &= 2\Delta R - 2\operatorname{div}(\operatorname{div} Ric) + 2\langle Ric, Ric\rangle \\ &= 2\Delta R - \operatorname{div}(\nabla R) + 2|Ric|^2 = \Delta R + 2|Ric|^2 .\end{aligned} \tag{6.3}$$

Niinpä maksimiperiaatteen nojalla on voimassa arvio

$$R(t) \geq R_{\min}(0), \tag{6.4}$$

jonka vuoksi positiivinen skalaarikaarevuus säilyy positiivisena Riccin virtauksessa.

Eräs jatkotutkimuksen aihe Riccin virtauksen aihepiiristä on konnektion kaksi-muodosta Ω muodostetun Pfaffianin $Pf(\Omega)$ geomerinen tulkitseminen. Pfaffian määritellään konnektion kaksi-muodon determinantin neliöjuurena, ja se kytkeytyy parillisissa dimensioissa Chern-Gauss-Bonnet-kaavan, Gaussin ja Bonnetin kaavan yleistyksen, kautta topologiaan seuraavasti

$$\int_{M^n} Pf(\Omega)d\mu = (2\pi)^n \chi(M^n). \tag{6.5}$$

Kaavan geometrinen tulkinta on kuitenkin Gaussin ja Bonnetin kaavaa epäselvempi johtuen Pfaffianin geometrisen tulkinnan puutteesta [Lee87, s.170].

Pinnalla Gaussin ja Bonnetin kaava kiinnitti keskimääräisen skalaarikaarevuuden topologiasta riippuvaksi Riccin virtauksessa säilyväksi vakioksi. Siksi on luonnollista kysyä minkä rajoitteen Gaussin ja Bonnetin kaavan yleistys (6.5) antaa Riccin virtaukselle ja pystyykö tällöin kaarevuutta muuttamaan Riccin virtauksella siten, että Chern-Gauss-Bonnet-kaavalle saataisiin selvä geometrinen tulkinta.

Riccin virtaus on luonnollinen evoluutioyhtälö varioitaessa metriikkaa. Riccin virtaus säilyttää metriikan sileyden ja lämpöyhtälömäisen luonteensa vuoksi virtaus tasoittaa metriikkaa. Lämpöyhtälömäisyydestä johtuu myös, että monesta alkutilanteesta päädytään samaan lopputilanteeseen. Tämän ilmiön huomasimme eksplisiittisesti pintojen tapauksessa. Olisikin mielenkiintoista tietää kuinka karkea alkuhetken metriikka voi olla ratkaisun olemassaolon kannalta ja kuinka ainutlaatuinen lämpöyhtälömäinen evoluutioyhtälö Riccin virtaus on.

Riccin virtauksen yhteydessä ei myöskään voi olla huomaamatta yhteyttä fysiikkaan ja gravitaatioon. Normalisoidun Riccin virtauksen kiintopiste on Einsteinin metriikka ja siten Einsteinin kenttäyhtälöiden ratkaisu tyhjössä kosmologisella vakiolla. Jos Riccin virtaus osoittautuu ainutlaatuiseksi lämpöyhtälömäiseksi evoluutioyhtälöksi, voi gravitaatiolle yrittää antaa tulkintaa termodynaamisena tasapainotilana.

Liite A

Liitteeseen on koottu hyödyllisiä tuloksia Riemannin geometrista, Riccin virtauksesta sekä Poissonin yhtälön ratkaisusta monistolla.

A.1 Riemannin geometrian identiteettejä

Propositio A.1. *Olkoon $g(t)$ yksiparametrinen derivoituva perhe Riemannin metriikoita (tai yleisemmin kääntyviä matriiseja). Tällöin pätee*

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \det g = Tr \left(g^{-1} \frac{\partial}{\partial t} g \right). \tag{A.1}$$

Todistus. Determinantin määritelmää

$$\det g = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) g_{1\sigma(1)} \cdots g_{n\sigma(n)} \tag{A.2}$$

derivoimalla saamme

$$\frac{\partial}{\partial t} \det g = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \sum_{\sigma \in S_n,\ \sigma(i)=j} sgn(\sigma) g_{1\sigma(1)} \cdots \widehat{g_{i\sigma(i)}} \cdots g_{n\sigma(n)}, \tag{A.3}$$

missä $\widehat{g_{i\sigma(i)}}$ tarkoittaa, että tekijä ei esiinny tulossa.

Käyttäen Cramerin sääntöä

$$g^{ij} = \frac{1}{\det g} \sum_{\sigma \in S_n,\ \sigma(i)=j} sgn(\sigma) g_{1\sigma(1)} \cdots \widehat{g_{i\sigma(i)}} \cdots g_{n\sigma(n)} \tag{A.4}$$

käänteismatriisin komponettien laskemiseen huomaamme, että

$$\frac{\partial}{\partial t} \det g = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) g^{ij} \det g = \det g \ \mathrm{Tr} \left(g^{-1} \frac{\partial}{\partial t} g \right). \tag{A.5}$$

Toisaalta pätee

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \det g = \frac{1}{\det g} \frac{\partial}{\partial t} \det g, \tag{A.6}$$

joten jakamalla (A.5) metriikan g determinantilla $\det g$ saadaan väite. □

Propositio A.2. *Olkoon $A \in \mathcal{T}_0^2(M)$ kaksi-tensori Riemannin monistolla M. Tällöin kaikille yksikkövektoreille U pätee*

$$|A(U,U)| \leq |A|_g, \tag{A.7}$$

missä epäyhtälön oikealla puolella on metriikan g määräämä normi.

Todistus. Olkoon $x \in M$ ja valitaan x-keskiset normaalikoordinaatit sen ympäristöön. Tällöin g on ykkösmatriisi pisteessä x ja pätee

$$\begin{aligned} |A(U,U)| &= |A_{ij}U^iU^j| \leq \sqrt{\sum_{i,j} A_{ij}^2}\sqrt{\sum_{i,j}|U^iU^j|^2} \\ &= \sqrt{g^{il}(x)g^{jk}(x)A_{ij}A_{lk}}\sqrt{(g_{il}(x)U^iU^l)\,(g_{jk}(x)U^jU^k)} \\ &= |A|_g|U|_g^2 = |A|_g. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Yllä on käytetty Schwarzin epäyhtälöä n^2-komponenttisille vektoreille A_{ij} ja U^iU^j. Piste $x \in M$ oli mielivaltainen, joten väite pätee koko monistolla M. □

Propositio A.3. *Olkoon M n-monisto. Riemannin kaarevuustensorin ja Riccin kaarevuuden normeille pätee*

$$|Ric| \leq \sqrt{n}\,|Rm|\,. \tag{A.9}$$

Todistus. Olkoon $x \in M$ ja suoritetaan seuraavat laskut x-keskisissä normaalikoordinaateissa. Ensinnäkin yleisesti summaukselle pätee

$$k\sum_{i=1}^k a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^2 = \sum_{i,j=1,\ i\neq j}^k (a_i - a_j)^2 \geq 0. \tag{A.10}$$

Niinpä saamme

$$\begin{aligned} |Ric|^2 &= g^{ij}g^{kl}R_{ik}R_{jl} = \sum_{i,k}(R_{ik})^2 = \sum_{i,k=1}^n \left(g^{jl}R_{jikl}\right)^2 \\ &\leq \sum_{i,k=1}^n n\sum_{l=1}^n R_{likl}^2 \leq \sum_{i,k=1}^n n\sum_{j,l=1}^n R_{jikl}^2 \\ &\leq n\ g^{a_1j}g^{a_2i}g^{a_3k}g^{a_4l}R_{a_1a_2a_3a_4}R_{jikl} = n\,|Rm|^2\,. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Koska x oli mielivaltainen, pätee epäyhtälö koko monistolla M. □

Propositio A.4. *Olkoon g Riemannin metriikka. Tällöin cg, $c > 0$, on myös Riemannin metriikka ja muunnos säilyttää konnektion, kaarevuusendomorfismin sekä Riccin tensorin:*

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k(cg) &= \Gamma_{ij}^k(g) \\ R_{ijk}^l(cg) &= R_{ijk}^l(g) \\ R_{ij}(cg) &= R_{ij}(g). \end{aligned} \tag{A.12}$$

Todistus. On ilmeistä, että cg on edelleen Riemannin metriikka ja lisäksi

$$(cg)^{-1} = \frac{1}{c} g^{-1}. \tag{A.13}$$

Christoffelin symbolit

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right), \tag{A.14}$$

siten säilyvät skaalauksessa. Christoffelin symbolien säilymisestä suoraan nähdään, että myös kaarevuusendomorfismin ja Riccin tensorin komponentit säilyvät:

$$\begin{aligned} R^m_{ijk} &= \partial_i \Gamma^m_{jk} - \partial_j \Gamma^m_{ik} + \Gamma^m_{ia} \Gamma^a_{jk} - \Gamma^m_{ja} \Gamma^a_{ik} \\ R_{ij} &= g^{kl} g_{lm} R^m_{kij}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

$\square$

Lemma A.5. *Olkoon M n-ulotteinen Riemannin monisto. Tällöin kovariantin derivaatan ∇_i ja Laplacen operaattorin Δ kommutaattori operoitaessa funktioihin on kuvaus $C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, joka voidaan lausua Riccin tensorin avulla seuraavasti*

$$[\nabla_i, \Delta] = -R_i{}^k \nabla_k, \tag{A.16}$$

missä $R_i{}^k = g^{kl} R_{il}$.

Todistus. Lasketaan aluksi kommutaattori $[\nabla_i, \nabla_j] \alpha_k$, missä α on kovektori. Evaluoidaan kommutaattori x-keskisten normaalikoordinaattien origossa:

$$\begin{aligned} (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) \alpha_k &= \nabla_i \left(\partial_j \alpha_k - \Gamma^l_{jk} \alpha_l \right) - \nabla_j \left(\partial_i \alpha_k - \Gamma^l_{ik} \alpha_l \right) \\ &= \partial_i \partial_j \alpha_k - \left(\partial_i \Gamma^l_{jk} \right) \alpha_l - \partial_j \partial_i \alpha_k + \left(\partial_j \Gamma^l_{ik} \right) \alpha_l \\ &= -R^l_{ijk} \alpha_l - \left(\partial_j \Gamma^l_{ik} \right) \alpha_l + \left(\partial_j \Gamma^l_{ik} \right) \alpha_l = -R^l_{ijk} \alpha_l \end{aligned} \tag{A.17}$$

Yllä on hyödynnetty, että $\Gamma^k_{ij} = 0$ pisteessä x sekä käytetty kaarevuusendomorfismin määritelmää (2.17). Koska yhtälön molemmat puolet ovat tensoriaalisia ja x oli mielivaltainen, pätee yhtälö koko monistolla M.

Funktion $u \in C^\infty(M)$ kovariantti derivaatta ∇u on kovektori, jonka komponentit ovat $\partial_i u$. Tätä huomiota käyttäen voimme laskea

$$\begin{aligned} \nabla_i \Delta u &= \nabla_i \nabla^k \nabla_k u = \nabla_i \left(g^{kl} \nabla_l \nabla_k u \right) \\ &= g^{kl} \nabla_i \nabla_l \nabla_k u = g^{kl} \left(\nabla_l \nabla_i + [\nabla_i, \nabla_l] \right) \nabla_k u \\ &= g^{kl} \nabla_l \left(\nabla_k \nabla_i + [\nabla_i, \nabla_k] \right) u + g^{kl} [\nabla_i, \nabla_l] \partial_k u \\ &= \Delta \nabla_i u + g^{kl} \nabla_l [\nabla_i, \nabla_k] u - g^{kl} R^a_{ilk} \partial_a u \end{aligned} \tag{A.18}$$

missä toisella rivillä on käytetty hyväksi metriikan yhteensopivuutta konnektion kanssa.

Kovarianttien derivaattojen kommutaattori häviää operoitaessa funktioon u:

$$[\nabla_i, \nabla_j]\, u = \partial_i \partial_j u - \Gamma^a_{ij} \partial_a u - \partial_j \partial_a u - \Gamma^a_{ji} \partial_a u = 0. \tag{A.19}$$

Niinpä yhtälö (A.18) voidaan edelleen kirjoittaa muodossa

$$[\nabla_i, \Delta]\, u = -g^{kl} R^a_{ilk} \partial_a u = -g^{kl} g^{ab} R_{ilkb} \nabla_a u = -R_i^{\ a} \nabla_a u. \tag{A.20}$$

□

Korollaari A.6. *Jos M on kaksiulotteinen Riemannin monisto, niin pätee* Ricci-identiteetti

$$[\nabla_i, \Delta]\, u = -\frac{1}{2} R \nabla_i u, \quad u \in C^\infty(M). \tag{A.21}$$

Todistus. Kaksi-monistoille pätee

$$R_{ij} = \frac{R}{2} g_{ij}, \tag{A.22}$$

joten edellisen proposition nojalla voimme laskea

$$[\nabla_i, \Delta] = -R_i^{\ k} \nabla_k = -g^{ka} R_{ia} \nabla_k = -g^{ka} \frac{R}{2} g_{ia} \nabla_k = -\frac{R}{2} \nabla_i. \tag{A.23}$$

□

Propositio A.7. *Jos $u \in C^\infty(M)$, niin*[1] *tällöin on voimassa identiteetti*

$$\Delta \left| \nabla u \right|^2 = 2 \left\langle \Delta \nabla u, \nabla u \right\rangle + 2 \left| \nabla^2 u \right|^2. \tag{A.24}$$

Todistus. Todistus on suora lasku, jossa käytämme metriikan yhteensopivuutta konnektion kanssa,

$$\begin{aligned} \Delta \left| \nabla u \right|^2 &= \nabla^k \nabla_k \left\langle \nabla u, \nabla u \right\rangle = 2 \nabla^k \left\langle \nabla_k \nabla u, \nabla u \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \Delta \nabla u, \nabla u \right\rangle + 2 \left\langle \nabla_k \nabla u, \nabla^k \nabla u \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \Delta \nabla u, \nabla u \right\rangle + 2 g^{kl} g^{ij} \nabla_k \nabla_i u \nabla_l \nabla_j u \\ &= 2 \left\langle \Delta \nabla u, \nabla u \right\rangle + 2 \left| \nabla^2 u \right|^2. \end{aligned} \tag{A.25}$$

□

A.2 Riccin virtauksen identiteettejä

Seuraavaksi johdamme kaksi Riccin virtaukselle pätevää identiteettiä.

[1] Yhtälössä esiintyvä Laplacen operaattori Δ yksimuodosta ∇u on yksimuoto, joka määritellään kuten funktioidenkin tapauksessa: $(\Delta \nabla u)_i = \nabla^k \nabla_k \nabla_i u$.

Propositio A.8. *Pinnalla normalisoidun Riccin virtauksen aikana seuraavat identiteetit ovat voimassa*

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = (R-r) g^{ij}, \quad i,j = 1, \dots n \tag{A.26}$$

ja

$$Tr\left(g^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k\right) = 0, \quad k = 1, \dots n. \tag{A.27}$$

Todistus. Ensimmäistä identiteettiä varten huomataan, että mille tahansa yksiparametriselle derivoituvalle perheelle $g(t)$ metriikoita (tai yleisemmin matriiseja) on voimassa

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(gg^{-1}\right) = g\frac{\partial}{\partial t}g^{-1} + \left(\frac{\partial}{\partial t}g\right)g^{-1}. \tag{A.28}$$

Tästä seuraa

$$\frac{\partial}{\partial t}g^{-1} = -g^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}g\right)g^{-1} = -g^{-1}(r-R)gg^{-1} = (R-r)g^{-1}, \tag{A.29}$$

mikä on komponenteissa sama kuin

$$\frac{\partial}{\partial t}g^{ij} = (R-r)g^{ij}. \tag{A.30}$$

Toinen identiteetti seuraa suoralla, joskin pitkähköllä, laskulla. Lasketaan jälleen normaalikoordinaattien keskipisteessä:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k\right) &= g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} \\
&= \frac{g^{ij}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}g^{kl}\right)\left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\right) \\
&\quad + \frac{g^{ij}}{2}g^{kl}\left(\partial_i\frac{\partial}{\partial t}g_{lj} + \partial_j\frac{\partial}{\partial t}g_{li} - \partial_l\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}\right) \\
&= \frac{g^{ij}}{2}g^{kl}\left[\partial_i\left((r-R)g_{lj}\right) + \partial_j\left((r-R)g_{li}\right) - \partial_l\left((r-R)g_{ij}\right)\right] \\
&= \frac{g^{ij}}{2}g^{kl}(r-R)(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \\
&\quad + \frac{g^{ij}}{2}g^{kl}\left(g_{lj}\partial_i(r-R) + g_{li}\partial_j(r-R) - g_{ij}\partial_l(r-R)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(g^{ki}\partial_i(r-R) + g^{kj}\partial_j(r-R) - ng^{kl}\partial_l(r-R)\right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{A.31}$$

missä n on moniston ulottuvuus kaksi. □

Proposition todistuksesta voimme myös huomata seuraavan:

Korollaari A.9. *Olkoon $g(t)$ yksiparametrinen perhe metriikoita, jotka toteuttavat*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = v_{ij}, \tag{A.32}$$

missä v_{ij} on jokin symmetrinen tensori. Tällöin

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -v^{ij}. \tag{A.33}$$

A.3 Poissonin yhtälön ratkaisu

Liitteen viimeissä osassa ratkaisemme Poissonin yhtälön

$$-\Delta_g u = f, \quad f \in C^\infty(M) \tag{A.34}$$

suljetulla eli kompaktilla ja reunattomalla monistolla.

Välttämätön ehto ratkaisun olemassaololle on

$$\int_M f d\mu = 0, \tag{A.35}$$

mikä nähdään Gaussin lausetta käyttämällä:

$$\int_M f d\mu = -\int_M \Delta u \, d\mu = -\int_{\partial M} \left\langle \overline{N}, \nabla u \right\rangle d\mu = 0. \tag{A.36}$$

Aloitamme ratkaisun etsimisen heikkojen ratkaisujen joukosta: funktio $u \in H_0^1(M) = H^1(M)$ on Poissonin yhtälön heikko ratkaisu, jos pätee

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, d\mu = \int_M f \varphi d\mu, \quad \varphi \in H_0^1(M). \tag{A.37}$$

Propositio A.10. *Poissonin yhtälöllä*

$$-\Delta u = f, \quad f \in L^2(M) \tag{A.38}$$

on suljetulla monistolla heikko ratkaisu, jos ja vain jos $\int_M f d\mu = 0$. Ratkaisu on vakiota vaille yksikäsitteinen.

Todistus. Tarkastellaan Poissonin yhtälön heikkoa muotoa aluksi avaruuden $H^1(M)$ suljetun alivaruuden

$$\mathring{H}^1(M) := \left\{ \varphi \in H^1(M) : \int_M \varphi d\mu = 0 \right\} \tag{A.39}$$

suhteen. Vaadimme, että yhtälö

$$a(u, \varphi) := \int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, d\mu = \int_M f \varphi d\mu =: L(\varphi) \tag{A.40}$$

pätee kaikilla $\varphi \in \mathring{H}^1(M)$. Normi avaruudessa $\mathring{H}^1(M)$ on luonnollisesti avaruudesta $H^1(M)$ indusoitu,

$$||u||_{\mathring{H}^1(M)} = ||u||_{L^2(M)} + ||\nabla u||_{L^2(M)}, \quad u \in \mathring{H}^1(M). \tag{A.41}$$

Sobolevin avaruudessa $\mathring{H}^1(M)$ pätee Poincaren epäyhtälö [Aub98, Cor 4.3],

$$||\nabla\varphi||_{L^2(M)} \geq \lambda \, ||\varphi||_{L^2(M)}, \quad \lambda > 0, \tag{A.42}$$

jota käyttämällä huomaamme, että a on koersiivinen:

$$a(\varphi,\varphi) = \int_M \langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle \, d\mu = ||\nabla\varphi||_{L^2(M)} \geq \lambda \, ||\varphi||_{L^2(M)}, \quad \lambda > 0, \tag{A.43}$$

kaikilla $\varphi \in \mathring{H}^1(M)$. Koska a on koersiivinen, se on myös positiividefiniitti. Käyttämällä Schwarzin epäyhtälöä huomaamme, että symmetrinen bilineaarinen muoto a on lisäksi rajoitettu:

$$\begin{aligned} |a(\varphi,\psi)| &\leq \int_M |\langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle| \, d\mu \leq \int_M |\nabla\varphi||\nabla\psi| d\mu \\ &\leq ||\nabla\varphi||_{L^2(M)} \, ||\nabla\psi||_{L^2(M)} \leq ||\nabla\varphi||_{\mathring{H}^1(M)} \, ||\nabla\psi||_{\mathring{H}^1(M)} \, . \end{aligned} \tag{A.44}$$

Niinpä a muodostaa sisätulon Hilbertin avaruudessa $\mathring{H}^1(M)$. Myös lineaarinen funktionaali L on rajoitettu:

$$|L(\varphi)| \leq \int_M |f\varphi| d\mu \leq ||f||_{L^2(M)} \, ||\varphi||_{L^2(M)} \leq ||f||_{L^2(M)} \, ||\varphi||_{\mathring{H}^1(M)} \, . \tag{A.45}$$

Näiden huomioiden nojalla Rieszin esityslauseen oletukset ovat voimassa ja on olemassa yksikäsitteinen avaruuden $\mathring{H}^1(M)$ alkio u, jolle

$$a(u,\varphi) = L(\varphi), \quad \varphi \in \mathring{H}^1(M). \tag{A.46}$$

Osoitetaan sitten, että u ratkaisee Poissonin yhtälön heikon muodon myös avaruudessa $H^1(M)$, kun oletamme $\int_M f d\mu = 0$. Olkoon $\varphi \in H^1(M)$ mielivaltainen ja asetetaan

$$\widetilde{\varphi} = \varphi - ⨍ \varphi d\mu \in \mathring{H}^1(M), \tag{A.47}$$

missä on merkitty

$$⨍ \varphi d\mu = \int_M \varphi d\mu \Big/ \int_M d\mu \tag{A.48}$$

on funktion φ integraalikeskiarvo. Nyt pätee

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) &= a(u,\widetilde{\varphi}) + a\left(u, ⨍ \varphi d\mu\right) \\ &= L(\widetilde{\varphi}) = L(\varphi) - L\left(⨍ \varphi d\mu\right) \\ &= L(\varphi) - ⨍ \varphi d\mu \int_M f d\mu \\ &= L(\varphi). \end{aligned} \tag{A.49}$$

Yllä käytimme oletusta, että funktion f integraali moniston M yli häviää. Tämä ehto on myös välttämätön ehto aiemman keskustelun nojalla.

Lopuksi osoitamme, että ratkaisu on vakiota vaille yksikäsitteinen. Jos u_1 ja u_2 ovat molemmat Poissonin yhtälön heikon muodon ratkaisuja, niin funktio $\hat{u} = u_1 - u_2 \in H^1(M)$ toteuttaa

$$a(\hat{u}, \varphi) = a(u_1, \varphi) - a(u_2, \varphi) = L(\varphi) - L(\varphi) = 0 \tag{A.50}$$

kaikilla avaruuden $H^1(M)$ funktioilla φ. Erityisesti, jos valitaan $\varphi = \hat{u}$, niin

$$0 = a(\hat{u}, \hat{u}) = \int_M \langle \nabla \hat{u}, \nabla \hat{u} \rangle \, d\mu. \tag{A.51}$$

Koska metriikka g on positiividefiniitti, on välttämättä $\nabla \hat{u} = 0$ ja $\hat{u}$ on siten vakio. □

Heikon ratkaisun säännöllisyys, eli sileys, on lokaali väittämä, joten euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ säännöllisyysteoria laajenee suoraan myös monistoille.

Lause A.11. *Poissonin yhtälöllä*

$$\Delta u = f, \quad f \in C^\infty(M), \int_M f d\mu = 0 \tag{A.52}$$

on vakiota vaille yksikäsitteinen sileä ratkaisu $u \in C^\infty(M)$.

Todistus. Olkoon $u \in H^1(M)$ yllä olevan Poissonin yhtälön heikko ratkaisu ja $\mathcal{U} = \{U_i\}$ moniston M koordinaattipeite. Riittää osoittaa, että heikon ratkaisun u rajoittuma avoimiin joukkoihin U_i on sileä. Erityisesti derivaattojen jatkuvuudesta seuraa, että tällöin heikko ratkaisu on myös vahva ratkaisu.

Tarkastellaan Poissonin yhtälön heikkoa muotoilua avoimessa joukossa U_i:

$$\int_{U_i} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, d\mu = \int_{U_i} f \varphi d\mu, \quad \varphi \in H_0^1(U_i). \tag{A.53}$$

Olkoon sitten $\varphi \in H_0^1(U_i)$ mielivaltainen. Koska $\operatorname{supp} \varphi \subset U_i$, niin φ voidaan jatkaa joukon U_i ulkopuolelle nollaksi. Siten $\varphi \in H_0^1(M)$, ja heikko ratkaisu $u \in H^1(M)$ toteuttaa

$$\int_{U_i} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, d\mu = \int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, d\mu = \int_M f \varphi d\mu = \int_{U_i} f \varphi d\mu. \tag{A.54}$$

Siten u on myös joukkoon U_i rajoitetun ongelman heikko ratkaisu. Säännöllisyysteoria euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimissa osajoukossa [Aub98, 3.54] osoittaa, että itseasiassa u on sileä joukossa U_i.

Heikko ratkaisu u on siis sileä jokaisessa peitteen jäsenessä, joten se on myös vahva ratkaisu näissä joukoissa. Siispä u on sileä Poissonin yhtälön vahva ratkaisu monistolla M. Lisäksi edellisen proposition nojalla heikko ratkaisu on vakiota vaille yksikäsitteinen, joten myös vahva ratkaisu on sitä. □

Korollaari A.12. *Harmoninen funktio suljetulla monistolla on vakio.*

Todistus. Harmoninen funktio $u \equiv 0$ on myös Poissonin yhtälön

$$\Delta u = 0 \tag{A.55}$$

ratkaisu, joten edellisen lauseen nojalla kaikki muut ratkaisut poikkeavat siitä korkeintaan vakiolla. □

Kirjallisuutta

[Aub98] Thierry Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998.

[Cho91] Bennet Chow. The Ricci flow on the 2-sphere. *Journal of Differential Geometry*, 33:325–334, 1991.

[CK04] B. Chow and D. Knopf. *The Ricci Flow: An Introduction*, volume 110 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, U.S.A., 2004.

[CLT06] Xiuxiong Chen, Peng Lu, and Gang Tian. A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134:3391–3393, 2006.

[CZ06] Huai-Dong Cao and Xi-Ping Zhu. A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures – application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. *Asian Journal of Mathematics*, 10:165–492, 2006.

[Ham82] R. Hamilton. Three manifolds of positive Ricci curvature. *J. Differ. Geom.*, 17:255–306, 1982.

[Ham88] R. Hamilton. The Ricci flow on surfaces. *Contemporary Mathematics*, 71:237–262, 1988.

[Lee87] John M. Lee. *Riemanninan Manifolds, An Introduction to Curvature*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, U.S.A., 1987.